ФАКТОРНИ МОДЕЛИ ЗА ОБЩОТО ВЛИЯНИЕ НА ПОВЪЗРАСТОВАТА СМЪРТНОСТ ВЪРХУ ИЗМЕНЕНИЕТО НА СРЕДНАТА ПРОДЪЛЖИТЕЛНОСТ НА ЖИВОТА

*Емил Христов**

Въведение в проблема

Настоящата статия има две основни цели. Първата е отговор и налагащо се по-точно обяснение на моя метод за измерване на влиянието на повъзрастовата смъртност върху изменението или различието на средната продължителност на живота Δe_0, който е публикуван в сп. „Статистика”, кн. 1/2003. Поводът е много закъснялото, но абсолютно неоснователно негово отхвърляне от вече покойния проф. д-р Божидар Русев в статията „Отново за измерване влиянието на повъзрастовата смъртност върху средната продължителност на живота”, публикувана в сп. „Статистика”, кн. 1 - 2/2010. Втората цел на настоящата статия е, след като поправя някои допуснати неточности и пропуски в моята предходна статия, да покажа, че факторният модел не е един, а са възможни няколко взаимообвързани модела за анализ на Δe_0, които са логически обосновани и могат да бъдат точно изведени. Посочените цели изискват по-подробно изложение на проблема поради неговия методологичен характер, който засяга не само демографската статистика, но и приложения на теорията на вероятностите, както и всички приложни статистики. Проблемът произлиза от два основни подхода за анализ, възприети от тези статистики. С единия от тях се оценява какво би станало, ако влиянието на промяната на даден факторен показател през един отчетен (текущ) период спрямо някакъв предходен (базисен) период се отчита с равнището на друг или други факторни показатели от отчетния период. С втория условен подход се оценява какво би станало, ако влиянието на същата факторна промяна се отчита с равнището на другия или другите факторни показатели от базисния период. Ефектът от влиянието на факторната промяна е промяната на резултативния показател (зависимата дискретна променлива), но с двата условни подхода се получават две различни решения. Тези подходи са възникнали много отдавна при анализа на влиянието от промените на цените в икономическата статистика и за съжаление, са се разпространили във всички останали приложни статистики. Вместо тях обаче има еднозначно решение, което съм приложил за оценяване на влиянието на повъзрастовата смъртност върху изменението на средната продължителност на живота в моята предходна статия. До това еднозначно решение стигнах по индуктивен логически път в икономическата статистика и го защитих първо в дисертацията ми за „доктор” през 1981 г., а след неговото по-нататъшно раз-

* Д.ик.н., професор; e-mail: emil_hristov_37@hotmail.com .

витие и приложение - в дисертацията за „доктор на икономическите науки” през 2001 г. при безусловната подкрепа на математическите среди. До същото решение може да се стигне и с критерий от теоретичната математика, който, колкото и да е странно, не е въведен още в приложните статистики. Неговите принципи са приложени и в новото изследване, което направих след критиката на проф. Б. Русев. Във връзка с това искам да отбележа, че независимо от начина, с който съм представен в неговата статия, тя стана повод за едно по-задълбочено и мащабно изследване на проблема. Крайният резултат от него са четири факторни модела, които предлагам за измерване на влиянието на повъзрастовата смъртност върху Δe_0. Поради специфичната трудност на проблема, обема на изследването и приложението на моделите с фактически данни възнамерявам да публикувам тези модели в две статии. В настоящата статия те обхващат само първия етап и методологическата основа на този анализ с общото влияние на повъзрастовата смъртност, а в друга статия на следващ етап ще бъдат представени окончателните модели според крайната цел на изследването за прякото и косвеното влияние на тази смъртност.

1. Проблемът на условните подходи за решението на демографската задача

Задачата за измерване на влиянието на повъзрастовата смъртност върху изменението на средната продължителност на живота може да се реши с двата условни подхода чрез съставяне на условни редици от вероятности за умиране по единични възрасти q_x. Например, с първия подход в редицата на вероятностите за отчетния период се „пренасят” вероятностите за умиране q_x^1 от базисния период от началната възраст 0 години до всяка следваща възраст x години, докато от x до последната възраст w години се запазват вероятностите за умиране q_x^2 от отчетния период[1]. Методът на проф. Б. Русев се основава всъщност на този условен подход (Русев, 2008, 2010). Ефектите от промените на повъзрастовата смъртност се измерват с разликите $e_0^2 - e_{0,x}^y$, където $e_{0,x}^y$ са условни средни продължителности на живота от таблиците за смъртност с условните редици на вероятностите за умиране q_x^1 и q_x^2. Същите ефекти се измерват при допълнително условие да се запазят на всяка възраст x години средните продължителности на предстоящия живот от отчетния период e_x^2 в условните $e_{0,x}^y$. Моето отношение към този метод е отрицателно поради две груби методологични грешки. Първата е концептуална, защото условните ре-

[1] Индекси 1 и 2 за базисния и отчетния период са според международно приетите означения (Preston, 2002).

дици на вероятностите за умиране, които са съставени с q_x^1 за едни възрасти и q_x^2 за други, са в противоречие с действителността. Те налагат многократни разделения на периода между двете таблици за смъртност от базисния и отчетния период на две части за всяка възраст от една година нагоре. Допускат се промени $\Delta q_x = q_x^2 - q_x^1$ на повъзрастовата смъртност само през първата част на периода от 0 до *x* години, докато през неговата втора част от възрастта *x* до последната *w* няма промени на вероятностите, тъй като на тези възрасти са поставени вече променените q_x^2 от отчетния период. Концептуалната грешка е допускането на промени на вероятностите q_x^1 само за една част от възрастите, защото в действителност във всеки момент на времето между двете таблици за смъртност се променят вероятностите на всички възрасти без изключение! Втората методологична грешка произлиза от първата и представлява условието да се запазят e_x^2 в условните $e_{0,x}^y$, за да бъдели разликите $e_0^2 - e_{0,x}^y$ ефекти само от промените на смъртността от 0 до *x* години (Русев, 2008, с. 123). Това условие обаче се изпълнява за всяка възраст *x* само с изкуствена подмяна на броя на доживелите l_x^1 от базисния период с l_x^2 от отчетния период. Причината за такава логически недопустима подмяна е, че със запазените вероятности q_x^1 в интервала от 0 до *x* години се получават винаги l_x^1 от базисния период, а не l_x^2 от отчетния период, с които са пресметнати e_x^2 за възрастите от *x* до *w* години. Следователно от условните редици на вероятностите за умиране q_x^1 и q_x^2 произлизат променени, а не запазени e_x^2. С посочената замяна на l_x^1 с l_x^2 се нарушава връзката между показателите на всяка таблица за смъртност, а оттам и точността на ефектите от промените на смъртността по възраст.

С другия условен подход могат да се съставят условни таблици за смъртност от други условни редици на вероятностите за умиране. В тях могат да се поставят вероятностите q_x^2 от втория (отчетен) период за последователните възрасти от 0 до *x* години, а за следващите възрасти от *x* до *w* години се запазват вероятностите q_x^1 от базисния период. В сравнение с модела на Б. Русев в този модел са разменени местата на вероятностите за умиране от двата периода. С всяка такава условна редица от вероятности q_x^2 и q_x^1 може да се състави също условна таблица за смъртност, от която се получава също условна средна продължителност на живота $e_{0,x}^y$, но за базисния период. Тя обаче е различна от условната $e_{0,x}^y$ за отчетния период в модела на Б. Русев, но за удобство я отбелязвам с неговия символ[2]. По тази причина с новите $e_{0,x}^y$ се съставят обратни разлики $e_{0,x}^y - e_0^1$, където при $\Delta e_0 > 0$, e_0^1 е известната по-малка средна про-

[2] Точните означения трябва да бъдат $e_{0,x}^{2y}$ за отчетния период и $e_{0,x}^{1y}$ за базисния период.

дължителност на живота от базисния период. Получените разлики измерват също влиянието на промените на повъзрастовата смъртност от 0 до x години върху Δe_0, но не са равни на разликите $e_0^2 - e_{0,x}^y$ от модела на Б. Русев. Те също са условни и фиктивни величини както разликите $e_0^2 - e_{0,x}^y$, защото произлизат също от редици, съставени с различните вероятности q_x^2 и q_x^1. Посочената нереалност на анализа с условните таблици за смъртност може най-ясно да се разбере, ако се измерва влиянието на различията на смъртността по възраст на две различни населения по категориен признак. Например, ако се анализират $\Delta e_0 = e_0^2 - e_0^1$ за мъжете и жените през един и същ период, не може да се говори за каквото и да е „запазване“ на вероятностите за умиране на едното население в редиците на вероятностите за другото население. Според метода на Б. Русев за възрастите 0 до x трябва да се вземат по-големите вероятности за умиране на мъжете и да се поставят в редицата с по-малките вероятности на жените. Със същото основание обаче могат да се вземат по-малките вероятности на жените за първата група възрасти и да се „пренесат” в редицата с по-големите вероятности на мъжете за следващите възрасти. По този начин се попада в прословутия „омагьосан кръг” на приложните статистики, поради който не може предварително и обективно да се реши кой от двата подхода е по-подходящ. В другия случай могат да се използват и двата подхода, с които се получават две различни решения по възраст. От тях обаче няма еднозначно решение, освен ако те не се усреднят чисто формално по аритметичен или геометричен начин. Или обобщено, с условните таблици за смъртност никога не може да се стигне до еднозначно и точно решение. Именно поради тази условност, както и поради недопустимостта да се заменят l_x^1 с l_x^2 при единия условен подход или l_x^2 с l_x^1 при другия условен подход, методът на Б. Русев е методологически неиздържан и неточен. Поради това той не е подходящ за учебник по демографска статистика, която е най-старата аналитична статистика, пряко свързана с теорията на вероятностите и с много други области на математиката.

2. Факторни модели с показателите за преживяване от таблиците за смъртност

Логическите основи на моите факторни модели са концепцията за анализ на процеси, основната зависимост $d_x = q_x l_x$ и показателите за преживяването по възраст l_x и L_x от таблиците за смъртност. Според концепцията за анализа на процеси всички показатели се изменят във всеки момент на времето между двете сравнявани таблици за смъртност едновременно на всички възрасти. При тази концепция се работи само с разлики между фактическите стойности на показателите от двете таблици без каквито и да са други допълнителни условия. Това е първото концептуално различие между моите модели и модела на Б. Русев.

Въз основа на посочените логически основания е изведено еднозначно решение в моята предходна статия. Най-напред ще отбележа, че в нея допуснах една методологическа неточност, която проф. Русев въобще не е забелязал и която няма нищо общо с неговите критики. Тя се състои в това, че за основа на анализа на Δe_0 взех формулата за $e_0 = \frac{\sum_{x=1}^{w} l_x}{l_0} + 0,5$ от неговите учебници по демографска статистика (в съавторство с проф. Сугарев), където: l_x е броят на доживелите до точната възраст *x* години, l_0 - хипотетичният брой на едно поколение от 100 000 живородени деца; *x* = 1, 2...*w* години, където *w* е крайната възраст за доживяване и според която нито едно лице няма да доживее следващата възраст *x*+*n* години (Сугарев, Русев, 1992; Русев, Сугарев, 2008). С тази формула може да се извърши анализ на Δe_0, но тя е неподходяща за измерване на влиянието от промяната на много важния показател за детската смъртност q_0. По-конкретно, с нея не може пряко да се измерва това влияние върху разликата ΔL_0 между по-големия брой на преживените човекогодини от момичетата L_0^2 и по-малкия брой на преживените човекогодини от момчетата L_0^1 в началния възрастов интервал 0 - 1 години. Причината е, че формулата за e_0 чрез броя на доживелите започва с l_1, а не с L_0. Следователно подходящата формула за анализ на Δe_0 с прякото влияние на промяната на детската смъртност Δq_0 е традиционната за $e_0 = \frac{\sum_{x=0}^{w} L_x}{l_0} = \frac{T_0}{l_0}$, където L_x е броят на преживените човекогодини в едногодишните възрастови интервали *x, x*+1 години. Ако се използва най-простата връзка между l_x и L_x в посочените учебници - $L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$, тя показва, че според технологията на таблиците за смъртност първо се пресмята l_x и след това L_x, но от единия показател много лесно се преминава в другия. Посочената възраст между l_x и L_x обаче е елементарна и много неточна за измерване на L_x чрез l_x за най-младите възрасти от 0 до 5 години. Тя е особено неподходяща за началния възрастов интервал 0 - 1 години. За следващите възрасти над 5 години нейната неточност отслабва, но не стига до по-точно измерване. При тези условия L_x за едногодишните възрастови интервали се определя с по-точната формула: $L_x = l_x - d_x + a_x d_x$, където a_x е частта или относителният дял от едногодишния възрастов интервал *x*, *x*+1 години, която е преживяна средно от едно умряло лице в него (Chiang, 1977; Големанов и други 1981; Preston, 2002). Според това определение a_x изпълнява условието $0 < a_x < 1$. По мое мнение точната стойност на a_0 за началния възрастов интервал 0 - 1 години се определя с метода на Чанг (Chiang, 1977). За останалите възрасти са известни различни методи за a_x, но те не са обект на обсъждане в настоящата статия (Preston, 2002). Ще отбележа само едно известно мнение на Световната здравна организация за показателя a_x (Chiang, 1977, Preston, 2002). Според него за възрастите над 5 години точните стойности на a_x нямали особено практическо значение, поради което можело да се приеме $a_x = \frac{1}{2}$. Тази стойност отговаря на елементарната връзка между l_x и L_x и по тази причина тя може да се приеме само като първо приближение. По-точните стойности на a_x за посочените единични възрасти обаче, както и стойностите на $a_{x,5}$ за анализа на $\Delta L_{x,5}$ по петгодишни възрастови интервали от известните съкратени таблици за смъртност, е необходимо да се измерват с по-точни методи. Това мнение се потвърждава и от съвременните анализи на преживяемостта по възраст (Preston, 2002). От изложеното дотук може да се даде следното още по-точно определение на a_x, което има много важен демографски смисъл. Тя е средната възраст на умрелите d_x само в границите на всеки отделен възрастов интервал *x*, *x*+1 години, т.е. без неговата долна граница *x* години. Според това определение a_x отразява различната интензивност на смъртността в отделните части на възрастовия интервал *x*, *x* + 1 години. Колкото тя е по-голяма в началото на възрастовия интервал, толкова е по-малка средната възраст на умрелите $0 < a_x < \frac{1}{2}$. И обратно, колкото смъртността е по-малка в началото на възрастовия интервал, толкова е по-голяма a_x в неравенството $\frac{1}{2} < a_x < 1$. Следователно по-точният брой на преживените човекогодини $L_x = l_x - d_x + a_x d_x$ може да се интерпретира и като брой на доживелите от възрастта 0 години до средната възраст *x*+a_x години във всеки едногодишен възрастов интервал. В заключение, анализът на Δe_0 от влиянието на повъзрастовата смъртност може да започне или с разликите $\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1$, или с разликите $\Delta L_x = L_x^2 - L_x^1$. Аналитично,

$$\Delta e_0 = e_0^2 - e_0^1 = \frac{T_0^2 - T_0^1}{l_0} = \left(\frac{\sum_{x=1}^{w} l_x^2}{l_0} + 0,5 \right) - \left(\frac{\sum_{x=1}^{w} l_x^1}{l_0} + 0,5 \right) = \frac{\sum_{x=1}^{w} l_x^2 - \sum_{x=1}^{w} l_x^1}{l_0} = \frac{\sum_{x=1}^{w} \left(l_x^2 - l_x^1 \right)}{l_0} = \frac{\sum_{x=1}^{w} \Delta l_x}{l_0},$$

или $\Delta e_0 = e_0^2 - e_0^1 = \dfrac{T_0^2 - T_0^1}{l_0} = \dfrac{\sum_{x=0}^{w} L_x^2 - \sum_{x=0}^{w} L_x^1}{l_0} = \dfrac{\sum_{x=0}^{w} \left(L_x^2 - L_x^1 \right)}{l_0} = \dfrac{\sum_{x=0}^{w} \Delta L_x}{l_0}$.

От посочените равенства произлизат два много важни извода. Първият е, че броят на доживелите l_x може да се приеме за брой на преживените човекогодини на всяка точна възраст x години, докато традиционният брой на преживените човекогодини L_x може да се приеме за брой на доживелите до всяка по-висока средна възраст $x + a_x$ години, която може да бъде по-малка, равна или по-голяма от формалната средна възраст $\dfrac{x + x + 1}{2} = x + 0,5$ години. Вторият извод е, че тъй като знаменателят на двата крайни израза за e_0 е константната величина l_0 и ако тя отпадне до крайния етап на анализа, тези изрази се свеждат до много удобните и известни суми за анализ: $\Delta T_0 = \sum_{x=1}^{w} \Delta l_x = \sum_{x=0}^{w} \Delta L_x$ за общия брой на повече или по-малко доживелите, който е равен на общия брой на повече или по-малко преживените човекогодини на всички възрасти. Следователно Δl_x е ефектът от влиянието на промените на повъзрастовата смъртност от началната възраст 0 години до точната възраст x години, докато ΔL_x е ефектът от същото влияние на промените на повъзрастовата смъртност от 0 години, но до по-високата средна възраст $x + a_x$ във всеки възрастов интервал x, x+1 години.

След като с условните модели, единият от които е на Б. Русев, не може да се получи еднозначно решение, възниква следващият методологичен проблем. Според него трябва да се определи с кой показател или показатели от таблиците за смъртност могат да се изразят разликите Δl_x и ΔL_x от промените на повъзрастовата смъртност, защото е очевидно, че нито Δl_x, нито ΔL_x могат направо да се измерят само с разликите Δq_x. Именно срещу тази елементарна истина е насочено основното и категорично възражение на Б. Русев срещу мен, че съм използвал табличния брой на умрелите по възраст d_x като изходен показател за измерване и анализ на преживяемостта, а не на вероятностите за умиране q_x (Русев, 2010). Поради това съм обвинен в заблуда, в методологическа и поради това - фундаментална грешка. Признавам, че първоначално дори не можех да повярвам на такова смайващо обвинение, но нека отговоря по същество на въпроса. След като показателите за преживяемостта l_x, L_x, T_0 и e_0 не могат да се изразят направо с вероятностите за умиране q_x, остава още един-единствен показател от таблиците за смъртност - табличният брой на умрелите d_x, който зависи пряко от q_x и измерва всички посочени показатели на преживяемостта. Както е известно, под влияние на повъзрастовата смъртност редицата на d_x в една таблица за смъртност показва процеса на непрекъснатото намаление на l_0 с отпадането на различни по големина части d_x на отделните възрасти от 0 години до най-високата *w*+*n* години. От посочения процес произлиза и последната (трета) формула за измерване на e_0 чрез d_x, която съм взел не от другаде, а също от учебниците на проф. Русев (Сугарев, Русев, 1992; Русев, Сугарев, 2008). Според нея $e_0 = \frac{\sum_{x=0}^{w}(x+0,5)d_x}{\sum_{x=0}^{w} d_x} = \frac{\sum_{x=0}^{w}(x+0,5)d_x}{l_0}$,

където (x+0,5) са средните възрасти на умиране на d_x в едногодишните възрастови интервали *x*, *x*+1 години.

Горната формула за e_0 показва, че освен като среден брой години, които предстоят да бъдат преживени от едно живородено дете, e_0 може да се интерпретира и като средна възраст на умиране на табличния брой на умрелите d_x. Тази двойствена интерпретация на e_0 произлиза от формулата за d_x. На всеки, който познава таблиците за смъртност, е добре известна основната зависимост в тях $d_x = q_x l_x$. Тя отразява едновременно двата противоположни, но взаимозависими и допълващи се процеса на смъртността и преживяемостта на всяка възраст. В нея вероятността за умиране q_x е действително изходният показател за измерване и анализ на преживяемостта на всяка възраст *x* години, както твърди проф. Русев, но заедно с този показател трябва задължително да се отчита и влиянието на броя на доживелите l_x, който е производен показател от вероятностите за умиране на предходните възрасти от 0 до *x* години. Според мен табличният брой на умрелите d_x и l_0 - хипотетичния брой на живородените, са само началните показатели за общото влияние на промените на повъзрастовата смъртност върху Δe_0, поради което предлаганите факторни модели в настоящата статия започват с тях. Тези модели обаче са само общата методологична основа за следващите факторни модели, всеки от които е с измерване на прякото влияние на повъзрастовата смъртност само от промените на вероятностите за умиране q_x и на нейното косвено влияние само от промените в броя на доживелите l_x. За разлика от факторните модели на други известни автори, с които също се измерват две влияния, проф. Русев въобще не е стигнал до отделни влияния (Preston, 2002). Това е второто концептуално различие между модела на проф. Русев и моите модели.

По-нататък от формулата за e_0 се вижда много ясно, че след като тя може да се измери чрез d_x, е съвсем естествено и разликите $\Delta l_x, \Delta L_x, \Delta T_o u \Delta e_0$ да се анализират чрез факторните разлики $\Delta d_x = d_x^2 - d_x^1$, които са също ефекти от промените на повъзрастовата смъртност. Разликите Δd_x се получават от редиците на d_x^1 и d_x^2 в двете сравнявани таблици за смъртност, които показват непрекъснатите намаления на l_0 във всяка таблица с отпадането на различните части d_x^1 и d_x^2 на отделните възрасти от 0 до w+1 години. По този начин ефектите от различната повъзрастова смъртност в двете таблици могат да се измерват със съответните разлики Δd_x. Или аналитично,

$$\Delta e_x = e_0^2 - e_0^1 = \frac{\sum_{x=0}^{w}(x+0,5)d_x^2}{l_0} - \frac{\sum_{x=0}^{w}(x+0,5)d_x^1}{l_0}.$$

Ако за удобство, както при анализа на Δe_0 чрез Δl_x и ΔL_x, отпадне l_0,се получава:

$$\Delta T_0 = T_0^2 - T_0^1 = \sum_{x=0}^{w}(x+0,5)d_x^2 - \sum_{x=0}^{w}(x+0,5)d_x^1 = \sum_{x=0}^{w}(x+0,5)\left(d_x^2 - d_x^1\right) = \sum_{x=0}^{w}\Delta d_x(x+0,5).$$

Формулата за анализ на ΔT_0 с разликите Δd_x обаче е формално вярна само за крайната разлика ΔT_0. В случая с $\Delta T_0 = \left(T_0^2 - T_0^1\right) > 0$, тя не е вярна за анализа по възраст, защото използва отрицателните разлики за умрелите жени спрямо умрелите мъже $\left(d_x^2 - d_x^1\right) < 0$, а не обратните положителни разлики за по-големия брой на преживелите жени на отделните възрасти $\left(d_x^1 - d_x^2\right) > 0$, от които произлиза неравенството $T_0^2 > T_0^1$. Причината е, че не е верен анализът на преживяемостта по възраст при $\Delta T_0 > 0$ с разликите $\Delta d_x = d_x^2 - d_x^1$, тъй като във всеки отделен възрастов интервал x, x+1 години при $d_x^1 > d_x^2$ е недопустимо да има по-голям брой преживени човекогодини от населението с по-големия табличен брой на умрелите d_x^1 и същевременно по-малък брой преживени човекогодини от населението с по-малкия табличен брой на умрелите d_x^2. Напротив, логически и демографски е вярно точно обратното, че за населението с по-големия табличен брой на умрелите d_x^1 ще има винаги по-малък брой на преживените човекогодини в сравнение с по-големия брой на преживените човекогодини от населението с по-малкия табличен брой на умрелите d_x^2. Оттук извеждам определящото значение на обратните разлики $\Delta d_x^{'} = d_x^1 - d_x^2$ във факторните модели за влиянието на повъзрастовата смъртност върху Δe_0 в моята предходна статия, където d_x^2 е за населението с по-голямата e_0^2 (Христов, 2003). Логическото основание на разликите $\Delta d_x^{'}$ се извежда от противоположността на двата взаимозависими процеса на смъртността и преживяемостта. Тези разлики показват табличния брой на преживелите $\Delta d_x^{'}$>0 или на непреживелите $\Delta d_x^{'}$<0 от по-малкия или по-големия табличен брой на умрелите d_x^2 за населението през втория (отчетен) период в сравнение с по-големия или по-малкия табличен брой на умрелите d_x^1 за населението през първия (базисен) период. Общото средство за двата анализа на преживяемостта и смъртността са таблиците за смъртност, които неслучайно в някои развити страни се наричат „таблици на живота". С това наименование се изтъква крайната цел на всяка таблица - че тя не се съставя само за анализ на повъзрастовата смъртност, а е за точно измерване и анализ на общата и повъзрастовата преживяемост именно чрез точното измерване и анализ на повъзрастовата смъртност. Според мен само с $\Delta d_x^{'}$ факторните модели за анализа на преживяемостта са логически и демографски обосновани. Тъй като всяка $\Delta d_x^{'}$ представлява обратна разлика на табличния брой на умрелите във възрастовия интервал *x, x*+1 години на две населения, предлагам за нея следното определение: частта от хипотетичното население l_x с по-малкия табличен брой на умрелите d_x, определена с разликата между този брой и по-големия табличен брой на умрелите от другото хипотетично население. Или за по-кратко - „преживелите във възрастовия интервал *x*, *x*+1 години". В обратния случай за другото хипотетично население разликата $\Delta d_x^{'}$<0 е табличният брой на непреживелите във възрастовия интервал *x*, *x*+1 години поради по-големия табличен брой на умрелите. Не съм правил подробна литературна справка дали това понятие е прието някъде, но мисля, че то е много подходящо, защото на английски го превеждам като „survivors by age". Целта на този превод е да се разграничат преживелите („the survivors") от международно приетите демографски и статистически термини „number of surviving to exact age" за доживелите l_x до точна възраст *x* и от „number of living at exact age" за броя на живеещите L_x, или преживените човекогодини на възраст *x* (Mortality and Life Expectancy by Sex and Place of Residence, www.nsi.bg). По мое мнение ако разликите на вероятностите за умиране Δq_x са началните факторни показатели за влиянието на промените на повъзрастовата смъртност върху Δe_0, преживелите или непреживелите $\Delta d_x^{'}$ са крайните факторни показатели на това влияние и същевременно изходните показатели на анализа на преживяемостта по възраст.

По-нататък в моята предходна статия съм показал, че от разликите $\Delta d_x^{'}$ произлизат повече или по-малко преживени човекогодини за всяко от двете населения както в отделния едногодишен възрастов интервал *x, x* + 1 години, така и във всеки по-голям интервал. Преминаването от разликите на преживелите $\Delta d_x^{'}$ в разлики на доживелите Δl_x за двете населения се извършва с втория предложен фактор в моята предходна статия - възрастовите разлики за доживяване или броят на годините за доживяване (Христов, 2003). В таблиците за смъртност по единични възрасти максималният брой на годините за доживяване се приема за равен на броя на възрастовите интервали 101 при *w* = 100 години. Този брой не пречи на точното изчисляване на последната средна продължителност на предстоящия живот $e_{100+} = \frac{T_{100t}}{l_{100}} = \frac{L_{100+}}{l_{100}}$, защото при $w = 100$ години последният възрастов интервал на умиране (100, 100+*n* години) е отворен и *n* може да бъде 1 година, 5 години или още по-голямо число години. Освен това в предлаганите модели се работи с разликите на доживелите Δl_x и на преживените човекогодини ΔL_x, които нямат отношение към последната година на умиране *w*+*n* години. Броят на годините за доживяване се извеждат и обосновават както разликите $\Delta d_x^{'}$ от противоположността на двата процеса на смъртността и преживяемостта. Според тази противоположност средните възрасти на умиране *x*+0.5 години във формулата на e_0 чрез d_x, които вземат стойности от 0 до *x*+0.5 години, се заместват с алтернативните на тях възрасти за доживяване (*w*-*x*+0.5) години, които се изменят от всяка възраст *x* години до последната *w*+0.5 години. Тези възрастови разлики обаче се отнасят за доживяването в посочените възрастови интервали при $a_x = \frac{1}{2}$. Точните възрастови разлики от всяка начална възраст *x* години до най-високата на умиране *w*+*n* години са (*w*+*1*-*x)* години. Основанието за тези разлики е, че последният възрастов интервал *w*, *w*+*n* години се приема за отворен с вероятностите за умиране на двете населения $q_{w+}^{1} = q_{w+}^{2} = 1$. При това условие и *w* = 100 години броят на всички разлики $\Delta d_x^{'}$ от началната възраст *x* = 0 години до последната *w*+ включително е 101. На това основание наричам разликите (*w*+*1*-*x)* „брой на годините за доживяване” на един човек от $\Delta d_x^{'}$. С произведението на двата фактора разликите $\Delta d_x^{'}$ и годините за доживяване (*w*+*1*-*x)* се съставят крайните ефекти $\Delta d_x^{'}$(*w*+*1*-*x)* човекогодини от всяка възраст *x* до последната *w*. За тези ефекти предлагам понятието „крайни”, защото се измерват в посочените възрастови граници. Тяхната сума $\sum_{x=0}^{w} \Delta d_x^{'}(w+1-x)$ е равна на разликата в общия брой на преживените човекогодини, изразена чрез Δl_x, или $\Delta T_0 = \sum_{x=1}^{w} \Delta l_x = \sum_{x=0}^{w} \Delta d_x^{'}(w+1-x)$ човекогодини. Това е моделът за крайните ефекти от промените на смъртността от всяка начална възраст *x* години до най-високата възраст на умиране *w*+*n* години. Всеки краен ефект $\Delta d_x^{'}$ (*w*+*1*-*x*) изразява повече или по-малко преживени човекогодини във възрастовия интервал от *x* до *w* години само от преживелите или непреживелите $\Delta d_x^{'}$ във възрастовия интервал *x, x*+1 години. Влиянията на двата фактора $\Delta d_x^{'}$ и (*w*+*1*-*x*) са противоположни, защото колкото разликата $\Delta d_x^{'}$ е по-голяма по абсолютна стойност и на по-ниска възраст, толкова по-голям е нейният положителен или отрицателен принос в ΔT_0 и Δe_0. И обратно, колкото по-малка е по абсолютна стойност и на по-висока възраст, толкова е по-малък нейният принос. Този проблем е отбелязан и от проф. Русев в неговия учебник чрез средните продължителности на предстоящия живот e_x на различните възрасти, но не е решен аналитично (Русев, 2008). Искам да обърна специално внимание на табличния брой на умрелите d_x във възрастовия интервал *x, x*+1 години. Този табличен брой е онази част от l_x, от която са загубени човекогодини само в интервала *x, x*+1 години и общо d_x (*w*+*1*-*x*) във всички едногодишни интервали от *x* до *w* години. Или в тях d_x се повтаря *w*+*1*-*x* пъти, което означава, че d_x се приемат за умрели не само във възрастовия интервал *x, x*+1 години, но и във всички следващи интервали от *x*+1 години до *w* години. Оттук общо непреживените човекогодини на всички възрасти са $\sum_{x=0}^{w} d_x(w+1-x)$, откъдето броят на всички преживени човекогодини T_0 е разликата $wl_0 - \sum_{x=0}^{w} d_x(w+1-x) + 50000$. С този израз може аналитично да се изведе моделът за крайните ефекти:

$$\Delta T_0 = T_0^2 - T_0^1 = \left[wl_0 - \sum_{x=0}^{w} d_x^2(w+1-x) + 50000 \right] - \left[wl_0 - \sum_{x=0}^{w} d_x^1(w+1-x) + 50000 \right] =$$

$$= \sum_{x=0}^{w} d_x^1(w+1-x) - \sum_{x=0}^{w} d_x^2(w+1-x) = \sum_{x=0}^{w} (d_x^1 - d_x^2)(w+1-x) = \sum_{x=0}^{w} \Delta d_x^{'}(w+1-x)$$

човекогодини.

Полученият факторен модел представлява сумата на известните крайни ефекти $\Delta d_x^{'}(w+1-x)$, които вече бяха логически изведени и интерпретирани. Това е моделът, който е представен в моята предходна статия, но там той е изведен за петгодишни възрастови интервали с неточни средни възрасти *x*+2.5

години, които съответстват на средните възрасти x+0.5 години в едногодишните възрастови интервали. Табличният брой на преживелите $\Delta d_x^{'}$ за хипотетичното население с по-малкия табличен брой на умрелите d_x във всеки възрастов интервал x, x+1 години се повтаря (w+1-x) пъти и показва, че не подлежи на измиране от възрастта x години до последната w години. За обратния случай с $\Delta d_x^{'}$<0 се приема, че недоживелите са умрели не само във възрастовия интервал x, x+1 години, но и във всички следващи интервали от x+1 години до последната w години. Всеки краен ефект $\Delta d_x^{'}(w+1-x)$ влияе пряко само върху общата разлика на преживените човекогодини на всички възрасти $\Delta T_0 = T_0^2 - T_0^1$, която не зависи само от величините на T_0^1 и e_0^1, но и от T_0^2 и e_0^2. Причината е, че анализът на ΔT_0 и Δe_0 е адитивен, защото използва само разлики между фактическите показатели от два периода за всички възрасти, независимо че те са относителни или средни величини. В своята статия Б. Русев смесва адитивния с индексния анализ, при който се работи с отношения на показателите (Русев, 2010). Този анализ на ΔT_0 и Δe_0 обаче излиза извън предмета на темата в настоящата статия. В заключение, разликата ΔT_0 може да се изрази и обясни с разликите Δl_x, а те от своя страна могат да се изразят и обяснят с разликите $\Delta d_x^{'}$. От нормираността на d_x в интервала от 1 до l_0=100 000 разликите $\Delta d_x^{'}$ изпълняват строгото условие $\sum_x \Delta d_x^{'} > 0 = \left| \sum_x \Delta d_x^{'} < 0 \right|$. Например, поради по-ниската смъртност на жените в детските, младите, средните и дори част от високите възрасти $\Delta d_x^{'}$ са положителни величини, които осигуряват прирасти на преживените човекогодини $\Delta d_x^{'}$(w+1-x) за жените в ΔT_0>0. Според посоченото условие обаче на останалите високи възрасти на жените $\Delta d_x^{'}$ са източник на загуби на човекогодини, но поради много малките стойности на другия фактор (w+1-x) години те не могат да неутрализират прираста на преживените човекогодини на жените на предходните възрасти. Аналогично и в динамичен аспект с предложения метод за анализ на общото влияние на повъзрастовата смъртност върху ΔT_0 и Δe_0 се установява на кои възрасти са преживелите $\Delta d_x^{'} > 0$ и на кои са непреживелите $\Delta d_x^{'} < 0$. И по-нататък - за кои възрасти от преживелите $\Delta d_x^{'} > 0$ се получават съответните прирасти на преживените човекогодини през втория (отчетен) период и на кои възрасти от непреживелите $\Delta d_x^{'} < 0$ произлизат намаленията на преживените човекогодини за този период. Следователно ΔT_0 и Δe_x са резултативни величини от прирасти и намаления на преживените човекогодини от $\Delta d_x^{'}$ на всички възрасти. Необходимо е да се има предвид, че прирастът на преживените човекогодини на всяка възраст x за едното население е точно равен по абсолютна стойност на загубените човекогодини от другото население на същата възраст.

Това свойство произлиза от обратимостта на задачата, защото от двата анализа на $\Delta T_0 = T_0^2 - T_0^1$ и $\Delta T_0 = T_0^1 - T_0^2$ трябва да се получават равни по абсолютна стойност ефекти, но с различни знаци.

По-нататък всеки ефект от общото влияние на повъзрастовата смъртност $\Delta d_x^{'}(w+1-x)$ може да се раздели на два отделни ефекта: $\Delta d_{xq}^{'}(w+1-x)$ само от факторната промяна на вероятностите за умиране $\Delta q_x^{'} = q_x^1 - q_x^2$ и ефекта $\Delta d_{xl}^{'}$ $(w+1-x)$ само от другата факторна промяна на броя на доживелите $\Delta l_x^{'} = l_x^1 - l_x^2$ на всяка възраст x (Христов, 2003). Първият ефект $\Delta d_{xq}^{'}(w+1-x)$ е прекият от влиянието само на промяната на повъзрастовата смъртност, докато вторият ефект $\Delta d_{xl}^{'}(w+1-x)$ е косвеният от това влияние на предходните възрасти. Това са крайните ефекти от анализа, които се основават на връзките между показателите $l_0, q_x, d_x, l_x\ L_x, T_0$ и e_0 според технологията на таблиците за смъртност. Пресмятането на същите ефекти и окончателните факторни модели с тях ще бъдат представени в друга статия. Там ще бъде показано, че за първия възрастов интервал 0 - 1 години има само частен случай на смъртността с промяната Δq_0, защото $\Delta l_0 = 0$. В своята статия Б. Русев е съставил един изкуствен пример само с такава промяна в интервала 0 - 1 години, докато за всички останали възрасти x = 1, 2... w е приел другия частен случай $q_x^1 = q_x^2$ (Русев, 2010). С него той отрича ефектите $\Delta d_{xl}^{'}(w+1-x)$, без да съобрази, че при $q_x^1 \neq q_x^2$ за всички останали възрасти се получават неравенствата $l_x^1 \neq l_x^2$, от които произлизат тези косвени ефекти. Аз съм обвинен в „услужливо" измерване на компоненти, които, противно на здравия разум, не съществували. Мисля, че след като този автор не е стигнал до пряко и косвено влияние на повъзрастовата смъртност, а всичките промени на T_0 и e_0 отдава на нейното общо влияние само с Δq_x, е излишен по-нататъшен коментар.

Другият факторен модел за крайните ефекти е с разликите на преживените човекогодини ΔL_x, които могат също да се изразят с преживелите $\Delta d_x^{'}$. Този факторен модел може да се изведе с общия член на разликите $\Delta L_x = \sum_{t=0}^{x} \Delta d_t^{'} + \Delta a_x d_x$, в който $\Delta a_x d_x = a^2{}_x d^2{}_x - a^1{}_x d^1{}_x$ е разлика в броя на преживелите във възрастовия интервал x, $x+1$ години само от разликата в преживяемостта на умрелите в него:

$$\Delta T_0 = T_0^2 - T_0^1 = \sum_{x=0}^{x} \Delta L_x = \sum_{x=0}^{w}\left(\sum_{t=0}^{x} \Delta d_t^{'} + \Delta a_x d_x\right) = \sum_{x=0}^{w} \Delta d_x^{'}(w+1-x) + \sum_{x=0}^{x} \Delta a_x d_x \ .$$

Първата сума от последните две представлява факторният модел за крайните ефекти с разликите Δl_x в отделните възрастови интервали x, $x+1$ година, докато втората сума е за крайните ефекти от промените на преживяемостта на умрелите в същите възрастови интервали.

3. Аналитично извеждане на факторните модели с анализ на отделните разлики Δl_x и ΔL_x

Изложените факторни модели за крайните ефекти в предходната т. 2 на статията са съставени според задачата за измерване на влиянието на повъзрастовата смъртност от всяка възраст *x* години до последната *w* години. За другата последователност на възрастите от началната 0 години до всяка следваща възраст *x* години или до средната $x + a_x$ години влиянието на повъзрастовата смъртност може да се измерва според един втори аспект на задачата с анализ на отделните Δl_x и ΔL_x. Този аспект се извежда пряко от традиционната технология на таблиците за смъртност, според която всяка разлика Δl_x и ΔL_x може да се разглежда като ефект на повъзрастовата смъртност от 0 до *x* или до $x + a_x$ години. Разликите Δl_x и ΔL_x се изразяват също с разликите за преживелите по възраст $\Delta d_x^{'}$, но са с възрасти за доживяване от 0 до *x* и от 0 до $x + a_x$ години. За целта се използват също известните връзки между l_0, l_x и d_x. Например, за първия модел с анализ на Δl_x изходното равенство за общия член l_x е $l_x = l_0 - d_0 - d_1 - ... - d_{x-1} = l_0 - \sum_{t=0}^{x-1} d_t$, където t = 0, 1, 2,…, w-1 години.

Разликата

$$\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1 = \left(l_0 - \sum_{t=0}^{x-1} d_t^2 \right) - \left(l_0 - \sum_{t=0}^{x-1} d_t^1 \right) = \sum_{t=0}^{x-1} d_t^1 - \sum_{t=0}^{x-1} d_t^2 = \sum_{t=0}^{x-1} (d_t^1 - d_t^2) = \sum_{t=0}^{x-1} \Delta d_t^{'}$$

човекогодини.

Тази сума показва от кои разлики на преживелите $\Delta d_x^{'}$ на отделните възрасти от 0 до *x* години се състои разликата в броя на доживелите Δl_x на точната възраст *x* години. Със същата сума се обяснява ефектът Δl_x от общото влияние на смъртността на всички предходни възрасти от началната 0 години до точната възраст *x* години. Сумата на тези ефекти за всички възрасти е равна на разликата в общия брой на преживените човекогодини, защото $\Delta T_0 = \sum_{x=1}^{w} \Delta l_x$, откъдето

$$\Delta T_0 = T_0^{\,2} - T_0^1 = \sum_{x=1}^{w} (l_X^2 + 50000) - \sum_{x=1}^{w} (l_X^1 + 50000) =$$

$$= \sum_{X=1}^{W} \left[\left(l_0 - \sum_{t=0}^{x-1} d_t^2 \right) - \left(l_0 - \sum_{t=0}^{x-1} d_t^1 \right) \right] = \sum_{x=1}^{w} \sum_{t=0}^{x-1} \Delta d_t^{'}$$

човекогодини.

Това е първият факторен модел с анализ на отделните Δl_x от общото влияние на повъзрастовата смъртност на всички предходни възрасти от началната

0 години до x години. От този модел лесно може да се премине в съответния модел за крайните ефекти $\Delta T_0 = \sum_{x=0}^{w} \Delta d_x^{'}(w+1-x)$ човекогодини, защото и двата модела се представят с разликите $\Delta d_x^{'} = \Delta d_t^{'}$.

От изложения първи факторен модел с анализ на отделните разлики Δl_x също лесно може да се премине във втория модел с анализ на отделните разлики ΔL_x. В този случай се използва съответното равенство за общия член L_x в т. 2 на статията. Според него:

$L_x = l_x - d_x + a_x d_x = l_0 - d_0 - d_1 - d_2 - ... - d_{x-1} - d_x + a_x d_x = l_0 - \sum_{t=0}^{x} d_t + a_t d_t$, където $x = 0, 1, 2, \ldots, w$ и $t = 0, 1, 2, \ldots, w$. От това равенство се преминава в разликата

$$\Delta L_x = L_x^2 - L_x^1 = \left[l_0 - \sum_{t=0}^{x} d_t^2 + a_x^2 d_x^2 \right] - \left[l_0 - \sum_{t=0}^{x} d_t^1 + a_x^1 d_x^1 \right] = \sum_{t=0}^{x} d_t^1 - a_x^1 d_x^1 - \sum_{t=0}^{x} d_t^2 + a_x^2 d_x^2 =$$

$$= \sum_{t=0}^{x} (d_t^1 - d_t^2) + a_x^2 d_x^2 - a_x^1 d_x^1 = \sum_{t=0}^{x} \Delta d_t^{'} + \Delta a_x d_x$$

човекогодини.

С тази формула се измерва ефектът ΔL_x чрез сумата на преживелите $\sum_{t=0}^{x} \Delta d_t^{'} + \Delta a_x d_x$ от началната възраст 0 години до средната възраст $x + a_x$ години във всеки възрастов интервал x, x+1 години. Същият ефект съответства на ефекта $\sum_{t=0}^{x} \Delta d_t^{'} + 0,5 \Delta d_x$, ако разликата ΔL_x се анализира със средната стойност на $a_x = \frac{1}{2}$. Или, вторият факторен модел с анализ на отделните ΔL_x от общото влияние на повъзрастовата смъртност на всички предходни възрасти от началната 0 години до средните възрасти е $\Delta T_0 = T_0^2 - T_0^1 = \sum_{x=0}^{w} \Delta L_x = \sum_{x=0}^{w} \left(\sum_{t=0}^{x} \Delta d_t^{'} + \Delta a_x d_x \right)$ човекогодини. Както е посочено в т. 2, този модел преминава в съответния за крайните ефекти $\Delta T_0 = \sum_{x=0}^{w} \Delta d_x^{'}(w+1-x) + \sum_{x=0}^{w} \Delta a_x d_x$ човекогодини.

В заключение, двата факторни модела с анализ на отделните разлики Δl_x и ΔL_x са с по-големи познавателни възможности от моделите за крайните ефекти, защото с тях се извършва последователен факторен анализ според таблиците за смъртност от началната възраст 0 години до отделните точни възрасти x или отделните средни възрасти $x + a_x$ години в едногодишните възрастови интервали *x*, *x*+1 години. За практически нужди е необходимо да се направи избор на единия от двата модела, който зависи от целта и задачите на изследването. Например, за демографския анализ и животозастраховането може да е по-подходящ факторният модел с анализа на отделните разлики ΔL_x, защото с тях се отчита влиянието на промяната или различието на важната детска смъртност до една година и се правят по-точни оценки на преживяването във всеки възрастов интервал. Другият факторен модел с анализа на отделните разлики Δl_x може да е по-неточен за анализ на преживяемостта в отделните възрастови интервали, но да е по-подходящ за някои приложения в биологията, експерименталната медицина, фармакологията и други области, тъй като с него могат да се отчитат ефекти за точни целочислени възрастови разлики. Препоръчително е обаче анализът да започне най-напред със съответния модел за крайните ефекти с двата отделни фактора $\Delta d_x^{'}$ и $(w+1-x)$ за възрастите от *x* до *w*, който има в друг аспект не по-малко важно познавателно значение от избрания модел с анализа на отделните разлики Δl_x и ΔL_x. Разбира се, избраните модели трябва да бъдат приложени в двете разгърнати форми за прякото и косвеното влияние на повъзрастовата смъртност, които ще бъдат представени в следваща статия. В нея ще бъдат представени и резултати от анализа на преживяемостта между мъжете и жените с таблици за смъртност по единични възрасти на НСИ от общото, прякото и косвеното влияние на различията между тяхната повъзрастова смъртност. Резултатите от този анализ ще бъдат сравнени с резултатите, получени с методи на други автори.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА:

Големанов, Н. и др. (1981). Смъртността в България 1960 - 2000 (анализ и прогнози), Медицина и физкултура, С.

Сугарев, З., Русев, Б. (1992). Демографска статистика. Университетско издателство „Стопанство", УНСС, С.

Русев, Б., Сугарев, З. (2008). Демографска статистика. Университетско издателство „Стопанство", УНСС, С.

Русев, Б. (2010). Отново за „Измерване влиянието на повъзрастовата смъртност върху средната продължителност на живота, Статистика, кн.1 - 2, С.

Христов, Е. (2003). Влияния на повъзрастовата смъртност на населението върху изменението на средната продължителност на живота, Статистика, кн. 1, С.

Chiang, C. L. (1977). Live Table and Mortality Analysis, World Health Organization, Geneva.

Preston, S., and others. (2002). Demography: Measuring and Modeling Population Processes. Oxford: Blackwell Publishers.

ФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ОБЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОВОЗРАСТНОЙ СМЕРТНОСТИ НА ИЗМЕНЕНИЕ СРЕДНЕЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

*Емил Христов**

РЕЗЮМЕ Статья посвящается значимой демографической проблеме о воздействии изменений повозрастной смертности на изменение средней продолжительности жизни. Автор уже предложил однозначное решение этой проблемы в статье, опубликованной в 2003 году в том же самом журнале, вып. 1 - 2, которое однако было отвергнуто покойным профессором Б. Русевым в его статье, опубликованной в 2010 году, вып. 1 - 2. Настоящая статья является ответом этой критике. В нее автор не только защищает свою предыдущую статью, но и развивает свою идею с помощью четырех факторных моделей. Методология этих моделей основывается на концепции об анализе процессов и известных связей и зависимостей между показателями в таблицах о смертности, с помощью которых вычисляют средние продолжительности жизни.

Согласно концепции об анализе процессов все показатели в каждой таблице о смертности изменяются в каждом моменте времени для всех возрастов. На основе связей и зависимостей между этими показателями изменение средней продолжительности жизни $\Delta e_0 = e_0^2 - e_0^1$ в данном отчетном периоде по сравнению с каким-то предыдущим (базовым) периодом может быть проанализировано тремя способами: разницами в числе доживших $\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1$ до каждого точного возраста х лет; разницами в числе прожитых человеко-лет $\Delta L_x = L_x^2 - L_x^1$ для каждого повозрастного интервала *x*, *x*+1 год; и разницами в табличном числе умерших $\Delta d_x = d_x^2 - d_x^1$ в тех самых повозрастных интервалах. Показатель L_x вычисляется более точной формулой: $L_x = l_x - d_x + a_x d_x$, где a_x является средним возростом умерших d_x только в границах каждого повозрастного интервала *x*, *x*+1 год. Эти три вида разниц рассматриваются как стоимости, результативные с изменений повозрастной смертности. Основную роль в предлагаемой методологии имеют однако не разницы Δd_x, а обратные разницы $\Delta d_x^{'} = d_x^1 - d_x^2$, посредством которых можно выразить разницы в переживаемости Δl_x и ΔL_x. Факторные разницы $\Delta d_x^{'}$ обоснованы логическим утверждением, что из меньшего табличного числа умерших в данном повозрастном интервале вытекает бóльшее число прожитых человеко-лет по сравнению с меньшим числом прожитых человеко-лет бóльшим табличным числом умерших в том же повозрастном интервале. Из-за этой решающей роли разницы $\Delta d_x^{'}$, для нее предлагается отдельное „демографическое понятие” пережившие в возрастном интервале *x*, *x*+1 год, в зависимости от разницы между меньшим табличным числом умерших d_x

* Проф., д. экон. н.; e-mail: emil_hristov_37@hotmail.com .

данного населения и бóльшим табличным числом умерших другого населения. В отличие от этого факторного показателя и концепции об анализе процессов, метод профессора Русева основан на условных рядах вероятностей смерти, которые для возрастов с начального 0 года до каждых последуюших *x* лет относятся к базисному периоду, а для остальных возрастов с *x*+1 год до последнего самого высокого возраста смерти - к отчетному периоду. Однако на основе этих рядов вероятностей получаются условные и недопустимые решения по возрасту согласно теории вероятностей, потому что в них неправильно допускается, что средние продолжительности предстоящей жизни e_x^2 для второго (отчетного) периода могут сохраниться посредством числа доживших l_x^1 первого (базисного) периода вместо верными l_x^2 с отчетного периода.

На основе представленной методологии на первом месте автор составил две факторные модели с разницами Δl_x и ΔL_x. Они названы моделями „конечных эффектов", так как ими измеряются эффекты с изменений в повозрастной смертности с каждого возраста *x* лет до конечного (наиболее высококого) возраста смерти. В этих моделях наряду с пережившими $\Delta d_x^{'}$, участвует и второй факторный показатель „число лет для доживания" одного человека с $\Delta d_x^{'}$ в повозрастном интервале от х до конечного возраста смерти. Эти два фактора влияют противоположно и раскрывают большие возможности для анализа. Согласно одного второго аспекта задачы, эффекты с изменений повозрастной смертности измеряются с начального возраста 0 лет до каждого следующего возраста х лет или до каждого среднего возраста смерти $x + a_x$ лет, в повозрастных интервалах *x*, *x*+1 год. Для этих эффектов составлены еще две модели для анализа отдельных разниц Δl_x и ΔL_x, которые также выражены пережившими $\Delta d_x^{'}$ и возрастами для доживания в упомянутых интервалах. В отличие от первых моделей конечных эффектов, вторые модели являются более детальными и указательными, в связи с которым они предлагаются для применения в практике. Выбор одной из них зависит от цели и задач исследования, но так как все модели представлены посредством $\Delta d_x^{'}$, то выбранная модель может впоследствии перейти в соответствующую модель конечных эффектов и обогатить анализ.

В дальнейшем посредством основной зависимости в таблицах о смертности $d_x = q_x * l_x$, автор разделил в своей предыдущей статье общее воздействие повозрастной смертности на две факторные воздействия: прямое воздействие - которое следует только с изменений в вероятностях смерти Δq_x в каждом повозрастном интервале, и косвенное - вытекающее только с изменений доживших Δl_x в возрасте х лет. Сам факторный анализ $\Delta d_x^{'}$ не представлен ни в предыдущей, ни в настоящей, а будет изложен в следующей статье, в которой все четыре модели будут в окончательном виде для прямого и косвенного воздействия повозрастной смертности.

FACTOR MODELS FOR THE GENERAL IMPACT OF MORTALITY BY AGE ON THE CHANGE IN THE EXPECTATION OF LIFE

*Emil Hristov**

SUMMARY The article focuses on the important demographic problem of the impact of variations in mortality by age on the change in the life expectancy. In earlier article of the journal (2003, Issue I) the author proposed a single solution of this problem which was refuted by the late Prof. B. Rusev (2010, Issues I-II). The presented article comes in response to Prof. Rusev's critical position in which the author not only defends his earlier arguments but develops his idea further to four interrelated factor models. The methodology of these models is based on the concept of process analysis and the known relationships and dependencies between indicators in life tables used to calculate the expectation of life.

According to the concept for process analysis, all indicators in every life table change at every point in time for all ages. Based on the relationships and dependencies between these indicators the change in the expectation of life: $\Delta e_0 = e_0^2 - e_0^1$ in a reporting period as compared to a previous (base) period may be analysed in three ways: using the differences in the number of persons surviving to any exact age *x* years: $\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1$, using the differences in the number of person-years reached in any age interval *x*, *x + 1* years: $\Delta L_x = L_x^2 - L_x^1$, and using the differences in the number of dying persons from *x* to *x + 1* years: $\Delta d_x = d_x^2 - d_x^1$. The indicator L_x may be computed using a more accurate formula: $L_x = l_x - d_x + a_x d_x$ where a_x is the mean age of dying persons d_x only within the limits of every age interval *x, x + 1* years. The three types of differences are viewed as values resulting from the change in mortality by age. However, the main importance in this methodology is not attributed to the differences Δd_x but the reverse differences $\Delta d_x^{'} = d_x^1 - d_x^2$, which can be used to express the differences in surviving Δl_x and ΔL_x. The factor differences $\Delta d_x^{'}$ are supported by the logical assertion that a smaller number of dying persons in a given age interval entails more survived person-years than a smaller number of survived person-years by a larger number of dying persons in the same age interval. Due to this decisive importance of the difference $\Delta d_x^{'}$ the author proposes that it is considered as a new separate demographic concept: "surviving persons in the age interval *x, x + 1* years according to the difference between the smaller number of dying persons d_x of one population and the larger number of dying persons of the other population". In contrast to this factor indicator and the concept of process analysis, the method employed by Prof. Rusev is based on conditional rows of probabilities of dying, which for the ages starting from 0 years to each following *x* years are taken from the base period, while for the remaining ages *x + 1* years up to the highest age of mortality *w + n* years are taken from the reporting period. These

* Prof., Ph.D. in Economics; e-mail: emil_hristov_37@hotmail.com .

rows of probabilities, however, yield conditional and unacceptable solutions by age using probability theory, because they incorrectly assume that the mean length of remaining lifetime for the second (reporting) period, for the ages from x to $w + n$, could be retained by means of the number of surviving persons l_x^1 taken from the first (base) period instead of the correct l_x^2 taken from the reporting period.

On the basis of the above methodology the author sets forth two factor models using the differences Δl_x and ΔL_x. They are termed models for ultimate effects (effects to the ultimate highest age) because they are used to measure the effects from the changes in mortality by age of every age from x years to the ultimate (the highest) age of dying. Besides the number surviving persons $\Delta d_x^{'}$ these models involve also a second factor indicator "years of surviving" of a person from $\Delta d_x^{'}$ in the age interval from x to the ultimate dying age. The two factors have opposite impact which contributes to the substantial possibilities of this analysis. According to a second aspect of the problem the effects of the changes in mortality by age are measured from the starting age of *0* years to every subsequent age x years or to every mean dying age $x + a_x$ years in age intervals $x, x + 1$ years. Two more models for analysis of the individual differences Δl_x and ΔL_x, which are also expressed through the number of surviving persons $\Delta d_x^{'}$ and the surviving ages in the given intervals. In contrast to the former models for ultimate effects, the latter ones are more detailed and indicative according to the life tables and are therefore proposed for practical implementation. The choice which one of them should be employed depends on the purposes and objectives of the particular study, but due to the fact that each model is expressed through $\Delta d_x^{'}$ the selected model can be subsequently converted into the respective ultimate effects model thus enriching the study.

Furthermore, in his previous article the author used the main dependency in the life tables $d_x = q_x * l_x$ to split the general influence of mortality by age into two factor influences: direct influence - based only on the probability of dying Δq_x in every age interval; and indirect influence - based only on the changing number of surviving persons Δl_x aged x years. The factor analysis of $\Delta d_x^{'}$ was not presented in the previous article, neither is it presented in the current one, but will be included in a future publication which will demonstrate the final versions of all four models for the direct and indirect impact of mortality by age.