ИНДЕКСЕН ФАКТОРЕН АНАЛИЗ НА ОБЕМА НА ПРОДУКЦИЯТА ОТ ЕДНОРОДНИ СЪВКУПНОСТИ НА СТОКИ С ДИСКРЕТНАТА НЕЧЕТНА ФУНКЦИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ СИГНУМ

*Емил Христов**

Въведение

В статията са представени еднозначните, верни и точни решения на традиционния индексен факторен анализ на обема на произведена, продадена или потребена продукция в паричен израз за две сравнявани години. Представена е методика за индексен анализ на обема на продукцията от еднородни съвкупности на стоки, всяка съвкупност от които представлява честотно разпределение на стоки от един и същи вид, различаващи се по цени и натурални количества в една и съща натурална мярка. Този анализ има специфично **предимство** пред адитивния факторен анализ, защото при него се работи с относителни величини (индекси), които не зависят от натуралните мерки и мащаби на отделните променливи. Относителните промени на факторите и на техните ефекти са най-точни и указателни величини на дискретния факторен анализ. Методиката за посочения индексен анализ е изведена от методиката за адитивния факторен ана-

* Професор, д.ик.н.; e-mail: emil_hristov_37@hotmail.com.

лиз на обема на продукцията от същите еднородни съвкупности в моята предходна статия в списанието (Христов, 2016). От своя страна, методиката за адитивния факторен анализ на продукцията от еднородните съвкупности е изведена от методиката за адитивния факторен анализ на продукцията на отделната стока (Христов, 2015). Препоръчвам на читателя да се запознае предварително със статиите в посочените два източника, защото чрез тях може по-лесно да влезе в методиката на индексния факторен анализ.

Предложената методика за индексен факторен анализ на продукцията от еднородни съвкупности се основава на принципното и съществено разграничение на статистическите съвкупности на еднородни и разнородни (Христов, 2016). Според авторовата методика всяка еднородна съвкупност се състои от един и същ вид стоки или подобни взаимозаменяеми стоки, които задоволяват точно определена конкретна потребност и имат освен индивидуални цени p_i още и средна цена $\bar{p}$, както и общо натурално количество Q в една и съща натурална мярка (Христов, 2016). Според определението на разнородна съвкупност тя е крайно множество на точно определени различни (разнородни) стоки, **обединени** за задоволяването на една обща потребност (множество на различни конкретни потребности), които се характеризират с различни цени p_i и натурални количества q_i в различни натурални мерки (Христов, 2016). Определението на една статистическа съвкупност като еднородна или разнородна не е математическа задача, защото за нейното решение няма аналитичен (математически) критерий. За всяка **конкретна** икономическа задача определението зависи в последна сметка от икономически съображения. Нещо повече, в икономиката се срещат и случаи, когато една и съща статистическа съвкупност се приема за определени задачи като еднородна, докато за други задачи - като разнородна. По мое мнение, именно липсата на критерий за ясно и точно разграничение на еднородните и разнородните съвкупности е **основната причина** за неверните решения на индексния факторен анализ в икономиката.

Адитивният и индексният факторен анализ на продукцията от еднородните съвкупности се извършват с двуфакторния мултипликативен модел $P = \bar{p} \times Q$ за една от основните и най-важни икономически зависимости на продукцията в паричен израз P от средната цена $\bar{p}$ на стоките в еднородната съвкупност и от тяхното общо натурално количество Q в определена натурална мярка (Христов, 2016). Адитивният факторен анализ има също свое **предимство** пред индексния анализ. Той е анализ на промяната на зависимата променлива - продукцията $\Delta\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0$ през отчетната спрямо базисната година от факторните промени на средната цена $\Delta p = \bar{p}_1 - \bar{p}_0$ и на натуралното количество на всички стоки $\Delta Q = Q_1 - Q_0$. С помощта на дискрената нечетна функция на математическия сигнум от адитивния анализ се определят **само** реално съществуващите ефекти в паричен израз - увеличения и/или намаления на продукцията (зависимата променлива). Същите реално съществуващи ефекти се получават с отчитане на едновременните съвместни еднопосочни и разнопосочни промени на двата фактора $\bar{p}$ и Q. Тези едновременни съвместни изменения са известни в анализа като „simultaneous changes“ (The Oxford Paperback Dictionary 1994). От еднопосочните факторни промени се получават два нетни ефекта и един съвместен ефект от еднопосочните съвместни влияния на двата фактора. За разлика от тях, от разнопосочните факторни промени има само два нетни ефекта с различни алгебрични знаци без съвместен ефект (Христов, 2015, 2016). С тази **нова** методика за адитивния факторен анализ се отхвърлят традиционните условни методи за адитивен факторен анализ в икономическото образование, с които промените на всеки фактор се умножават или само с базисните равнища на другия фактор, или само с неговите отчетни равнища (Гатев, 1995). С изключение на случая с едновременните увеличения на двата фактора, в останалите случаи със старите условни методи възникват два фиктивни ефекта, които са включени в двата нетни ефекта. По този начин се получават **неверни ефекти** (Христов, 2015, 2016). Реалните ефекти са в две форми: **абсолютни** ефекти в паричен израз като прирасти и/или намаления на продукцията от базисната година, и **относителни** ефекти като относителни прирасти и/или намаления на базисната продукция, които са отношения на абсолютните ефекти към същата продукция от базисната година. С реалните относителни ефекти се **преминава** от адитивен факторен анализ в индексен факторен анализ. По тази причина адитивният факторен анализ се разглежда като **предходен** на индексния факторен анализ, с които двата анализа представляват две форми на един и същ дискретен статистически факторен анализ.

Индексният факторен анализ на продукцията от еднородните съвкупности на стоките се извършва с индексния двуфакторен мултипликативен модел $I_0 = I_{\bar{p}} \times I_Q$, където $I_0 = \frac{P_1}{P_0}$ е множественият индекс на продукцията, $I_{\bar{p}} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0}$ е единичният факторен индекс за средната цена на стоките от еднородната съвкупност, и $I_Q = \frac{Q_1}{Q_0}$ е единичният факторен индекс за общото натурално количество на всички стоки за отчетната и базисната година. Решението с този модел в общия случай обаче може да бъде **невярно,** защото факторните индекси $I_{\bar{p}}$ и I_Q могат да съдържат **фиктивни** ефекти. За вярното еднозначно решение е необходимо факторните индекси да се **заменят** с равни на тях **аналитични** индекси (Христов, 2015). Тези индекси се съставят с реалните относителни ефекти от адитивния факторен анализ и евентуалните фиктивни ефекти. Вярното и точно решение на индексния факторен анализ се получава с произведението на аналитичните индекси, от което **отпадат** фиктивните ефекти и **остават** само реалните относителни ефекти от адитивния факторен анализ.

От всичко изложено дотук читателят може с основание да запита, защо трябва да се решава индексният факторен анализ с факторни и аналитични индекси, когато крайните решения на този анализ могат направо да се получат от относителната форма на адитивния факторен анализ? Отговорът на този въпрос произлиза от задачата на индексния анализ. При нея се търсят двата аналитични индекса, с които се **заместват** двата факторни индекса при строгото условие за **равенство** на всеки аналитичен индекс със съотвения факторен индекс (Христов, 2015). Разликата между тези индекси е, че ако всеки факторен индекс показва относителното изменение (прираст или намаление) на даден факторен показател, със съответния аналитичен индекс се измерва **ефектът** (относителният прираст или намаление на зависимата променлива P_0) от относителното изменение на факторния показател.

Предлаганата методика за индексен факторен анализ на продукцията от еднородните съвкупности на стоките е **нова,** защото използва **същите** реални относителни ефекти, получени с **новата** методика за адитивен факторен анализ на продукцията на същите еднородни съвкупности на стоките. Както с новата методика за адитивния факторен анализ не се допускат фиктивни ефекти, така и с новата методика за индексния факторен анализ се отхвърлят фиктивните ефекти, които съществуват в множествените индекси за цените на Ласпейрес и Пааше, както и във факторните индекси от образованието, които се построяват с факторните промени на средни величини (Сугарев, 1975; Гатев, 1995; Русев и Сугарев, 2008).

Следващият индексен факторен анализ е на продукцията от разнородните съвкупности на стоките. Тези съвкупности могат да се представят като крайни множества на различни, но **еднородни подсъвкупности** на стоките (Христов, 2016). Най-подробната и точна групировка на различните стоки от една разнородна съвкупност се получава, когато всяка еднородна подсъвкупност включва само една различна стока. По този начин отделната стока се разглежда като еднородна съвкупност със средна цена и натурално количество. Оттук по аналогия индексният факторен анализ на продукцията от всяка еднородна съвкупност с краен брой стоки може да се изведе **направо като обобщение** на индексния факторен анализ на продукцията на отделната стока **без** предходен адитивен факторен анализ. За тази цел в следващата точка 1 са представени всички еднозначни решения на индексния факторен анализ за отделната стока.

1. Индексен факторен анализ на обема на продукцията на отделната стока от промени на нейната цена и натурално количество

Индексният факторен анализ на обема на продукцията на една отделна стока има четири еднозначни, верни и точни решения със следните факторни и аналитични индекси:

при $I_{p(q_0)} > 1$ и $I_{q(p_0)} > 1,\ I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q(p_0)} = I_{\Delta p} \times I_{\Delta q}$;

при $I_{p(q_1)} < 1$ и $I_{q(p_1)} < 1, I_0 = I_{p(q_1)} \times I_{q(p_1)} = \text{в}I_{\Delta p} \times \text{в}I_{\Delta q}$;

при $I_{p(q_1)} > 1$ и $I_{q(p_0)} < 1,\ I_0 = I_{p(q_1)} \times I_{q(p_0)} = \text{в}I_{\Delta p} \times I_{\Delta q}$;

при $I_{p(q_0)} < 1$ и $I_{q(p_1)} > 1,\ I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q(p_1)} = I_{\Delta p} \times \text{в}I_{\Delta q}$,

където **p** е индивидуалната средна хронологична цена на стоката за всяка наблюдавана година[1], индексите $I_{p(q_0)}, I_{p(q_1)}, I_{q(p_0)}$ и $I_{q(p_1)}$ са факторните при постоянен състав, а индексите $I_{\Delta p}, I_{\Delta q}, \text{в}I_{\Delta p}$и $\text{в}I_{\Delta q}$ са аналитичните с реалните и фиктивните ефекти (Христов, 2015).

Факторните индекси при постоянен състав са следните: $I_{p(q_0)} = \frac{\mathrm{p}_1 q_0}{\mathrm{p}_0 q_0}$ и $I_{p(q_1)} = \frac{\mathrm{p}_1 q_1}{\mathrm{p}_0 q_1}$ са за цените на Ласпейрес и Пааше при постоянен състав на натуралните количества на стоката q_0 и q_1, $I_{q(p_0)} = \frac{q_1 p_0}{q_0 p_0}$ и $I_{q(p_1)} = \frac{q_1 p_1}{q_0 p_1}$ са за натуралните количества на стоката при постоянен състав на цените p_0 и p_1. Както се вижда от изложеното, при индексния факторен анализ на продукцията на отделната стока факторните индекси за цените на Ласпейрес и Пааше са единични индекси и са равни на единичния факторен индекс за цената на стоката $I_{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{p}_1}{\mathrm{p}_0}$, защото няма никакво значение с кое натурално количество q_0 или q_1 се умножават двете цени p_0 и p_1. Другите два факторни индекса за натуралните количества на стоката са също равни на единичния факторен индекс $I_q = \frac{q_1}{q_0}$, защото няма никакво значение с коя цена p_0 или p_1 се умножават двете количества q_0 и q_1.

[1] За удобство цената **p** не е означена като средна $\bar{p}$, защото това означение се използва за средна цена на една стока от еднородна съвкупност на стоките.

Аналитичните индекси $I_{\Delta \mathrm{p}}$ и $I_{\Delta q}$ са **нетни** аналитични за нетните относителни ефекти (относителни прирасти или намаления на зависимата променлива $\frac{\Delta P_P}{P_0}$ и $\frac{\Delta P_q}{P_0}$) само от отделните относителни промени на цената $\frac{\Delta \mathrm{p}}{\mathrm{P}_0}$ и на натуралното количество на стоката $\frac{\Delta q}{q_0}$. Индексите в$I_{\Delta p}$ и в$I_{\Delta q}$ са **брутни** аналитични за **общите** нетни и съвместни относителни **ефекти** (относителни прирасти или намаления на зависимата променлива P_0) от **общите** нетни и съвместни промени на цената и натуралното количество на стоката. Всички нетни и брутни ефекти се получават от предходния адитивен факторен анализ (Христов, 2015).

Аналитичните индекси изпълняват две функции. Най-напред като равни на факторните индекси те също измерват относителните промени на отделните фактори. Втората функция обаче е по-важна, защото от произведението на аналитичните индекси произлизат еднозначните решения на индексния факторен анализ. Тези решения съдържат само **реалните** относителни ефекти от адитивния факторен анализ (увеличенията и/или намаленията на зависимата променлива P_0).

Точният състав на аналитичните индекси е следният:

при $I_p > 1$ и $I_q > 1, I_{\Delta \mathrm{p}} = 1 + \frac{\Delta \mathrm{P_p}}{\mathrm{P}_0}$ и $I_{\Delta q} = 1 + \frac{\Delta \mathrm{P}_q}{\mathrm{P}_0}$;

при $I_p < 1$ и $I_q < 1,$ в$I_{\Delta \mathrm{p}} = 1 - \frac{\Delta \mathrm{P_p}}{\mathrm{P}_0} - \frac{\Delta \mathrm{P_{p}}_q}{\mathrm{P}_0}$ и в$I_{\Delta q} = 1 - \frac{\Delta \mathrm{P}_q}{\mathrm{P}_0} - \frac{\Delta \mathrm{P}_{pq}}{\mathrm{P}_0}$;

при $I_p > 1$ и $I_q < 1,$ в$I_{\Delta \mathrm{p}} = 1 + \frac{\Delta \mathrm{P_p}}{\mathrm{P}_0} + \frac{f \Delta \mathrm{P_{pq}}}{\mathrm{P}_0}$ и $I_{\Delta q} = 1 - \frac{\Delta \mathrm{P}_q}{\mathrm{P}_0}$;

при $I_p < 1$ и $I_q > 1, I_{\Delta \mathrm{p}} = 1 - \frac{\Delta \mathrm{P_p}}{\mathrm{P}_0}$ и в$I_{\Delta q} = 1 + \frac{\Delta \mathrm{P}_q}{\mathrm{P}_0} + \frac{f \Delta \mathrm{P_{pq}}}{\mathrm{P}_0}$,

където двата съвместни ефекта $\frac{f \Delta \mathrm{P_{pq}}}{\mathrm{P}_0}$ са **фиктивни** или реално несъществуващи величини.

От представените равенства се вижда, че за разлика от адитивния факторен анализ, при който всички ефекти според знаковата функция на математическия сигнум са **реални** величини, при индексния факторен анализ възникват и **фиктивни** съвместни ефекти от разнопосочните факторни промени при $I_p > 1$ и $I_q < 1,$ както и при $I_p < 1$ и $I_q > 1.$ Причината за тяхното възникване е, че двата факторни индекса I_p и I_q в мултипликативния индексен модел $I_0 = I_p \times I_q = \frac{p_1}{\mathrm{P}_0} \times \frac{q_1}{P_0}$ участват като **независими** величини. Това означава, че промяната на всеки фактор се отчита при запазеното базисно равнище на другия фактор. Например в първия случай на разнопосочните факторни промени $I_p > 1$ и $I_q < 1$, ако увеличението на цената $\Delta\mathrm{p} > 0$ се отчита (умножи) с по-голямото базисно равнище на натуралното количество q_0 според условието $q_0 > q_1$, възниква освен положителният реален ефект $\frac{\Delta\mathrm{P_p}}{\mathrm{P_0}}$ още и един положителен фиктивен съвместен ефект $\frac{f\Delta\mathrm{P}_{\mathrm{p}q}}{\mathrm{P_0}}$. Или само от увеличението на цената, **без** да се отчита едновременното намаление на натуралното количество на стоката, се появява и положителният фиктивен съвместен ефект. В действителност обаче именно поради **едновременното намаление** на натуралното количество и **едновременното увеличение** на цената, които са известни като едновременни съвместни промени (simultaneous changes), няма такъв съвместен ефект. Неговото присъствие в брутния аналитичен индекс в$I_{\Delta\mathrm{p}} = 1 + \frac{\Delta\mathrm{P_p}}{\mathrm{P_0}} + \frac{f\Delta\mathrm{P}_{\mathrm{p}q}}{\mathrm{P_0}}$ се налага само от строгото условие, че този индекс трябва да бъде равен на факторния индекс $I_p = \frac{p_1}{\mathrm{P_0}}$. По аналогичен начин се обяснява и присъствието на положителния фиктивен съвместен ефект $\frac{f\Delta\mathrm{P}_{\mathrm{p}q}}{\mathrm{P_0}}$ в другия случай с разнопосочните факторни промени $I_p < 1$ и $I_q > 1$. Ако увеличението на натуралното количество на стоката $\Delta q > 0$ се отчита (умножи) с по-голямото базисно равнище на цената $\mathrm{p_0}$ според условието $\mathrm{p_0} > \mathrm{p_1}$, се появява освен положителният реален ефект $\frac{\Delta\mathrm{P}_q}{\mathrm{P_0}}$ още и положителният фиктивен съвместен ефект $\frac{f\Delta\mathrm{P}_{\mathrm{p}q}}{\mathrm{P_0}}$. Или само от увеличението на натуралното количество на стоката, **без** да се отчита едновременното намаление на нейната цена, възниква също положителен фиктивен съвместен ефект. В действителност обаче от **едновременното намаление** на цената и **едновременното увеличение** на натуралното количество на стоката (simultaneous changes) също няма фиктивен ефект. Неговата поява се обяснява само със същото строго условие, че брутният аналитичен индекс в$I_{\Delta q} = 1 + \frac{\Delta\mathrm{P}_q}{\mathrm{P_0}} + \frac{f\Delta\mathrm{P}_{\mathrm{p}q}}{\mathrm{P_0}}$ трябва да бъде равен на факторния индекс $I_q = \frac{q_1}{q_0}$.

При еднопосочните промени с едновременните намаления на двата фактора $I_p < 1$ и $I_q < 1$, двата аналитични индекса са **брутни** в$I_{\Delta\mathrm{p}} = 1 - \frac{\Delta\mathrm{P_p}}{\mathrm{P_0}} - \frac{\Delta\mathrm{P}_{\mathrm{p}q}}{\mathrm{P_0}}$ и в$I_{\Delta q} = 1 - \frac{\Delta\mathrm{P}_q}{\mathrm{P_0}} - \frac{\Delta\mathrm{P}_{\mathrm{p}q}}{\mathrm{P_0}}$, защото всеки от тях съдържа **реалният** отрицателен съвместен ефект $\frac{-\Delta\mathrm{P}_{\mathrm{p}q}}{\mathrm{P_0}}$, а не фиктивен съвместен ефект. В другия случай с едновременните увеличения на двата фактора $I_p > 1$ и $I_q > 1$, аналитичните индекси $I_{\Delta\mathrm{p}}$ и $I_{\Delta q}$ са **нетни,** защото не съдържат реален съвместен ефект.

Всички тези правила и ефекти са изведени аналитично с четири примера за четирите възможни случая на факторни промени за адитивния и индексния факторен анализ на продукцията на отделната стока (Христов, 2015). Освен аналитично, те са представени и графично на отделни фигури в посочения източник (статия) за всеки един от четирите примера.

С всички посочени факторни и аналитични индекси се получават четири възможни верни и точни решения на индексния факторен анализ за обема на продукцията на отделната стока:

при $I_p > 1$ и $I_q > 1$, $I_0 = I_p \times I_q = I_{\Delta p} \times I_{\Delta q}$,

откъдето $I_0 = \frac{p_1}{\mathrm{P}_0} \times \frac{q_1}{q_0} = \left(1 + \frac{\Delta P_p}{P_0}\right)\left(1 + \frac{\Delta P_q}{P_0}\right) = 1 + \frac{\Delta P_p}{\mathrm{P}_0} + \frac{\Delta P_q}{\mathrm{P}_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{\mathrm{P}_0}$,

където $\frac{\Delta P_{pq}}{\mathrm{P}_0} = \frac{\Delta \mathrm{p} \Delta q}{\mathrm{P}_0} = \frac{\Delta P_p}{\mathrm{P}_0} \times \frac{\Delta P_q}{\mathrm{P}_0}$;

при $I_p < 1$ и $I_q < 1$, $I_0 = I_p \times I_q = \text{в}I_{\Delta p} \times \text{в}I_{\Delta q}$,

откъдето $I_0 = \frac{p_1}{\mathrm{P}_0} \times \frac{q_1}{q_0} = \left(1 - \frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{\mathrm{P}_0}\right) \times \left(1 - \frac{\Delta P_q}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{\mathrm{P}_0}\right) = 1 - \frac{\Delta P_p}{\mathrm{P}_0} - \frac{\Delta P_q}{\mathrm{P}_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{\mathrm{P}_0}$,

където $\frac{-\Delta P_{pq}}{\mathrm{P}_0} = \frac{-\Delta \mathrm{p} \Delta q}{\mathrm{P}_0} = (-1)\ \frac{-\Delta P_p}{\mathrm{P}_0} \times \frac{-\Delta P_q}{P_0}$;

при $I_p > 1$ и $I_q < 1$, $I_0 = I_p \times I_q = \text{в}I_{\Delta p} \times I_{\Delta q}$,

откъдето $I_0 = \frac{p_1}{\mathrm{P}_0} \times \frac{q_1}{q_0} = \left(1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{f \Delta P_{pq}}{\mathrm{P}_0}\right) \times \left(1 - \frac{\Delta P_q}{P_0}\right) = 1 + \frac{\Delta P_p}{\mathrm{P}_0} - \frac{\Delta P_q}{\mathrm{P}_0}$ и

при $I_p < 1$ и $I_q > 1$, $I_0 = I_p \times I_q = I_{\Delta p} \times \text{в}I_{\Delta q}$,

откъдето $I_0 = \frac{p_1}{\mathrm{P}_0} \times \frac{q_1}{q_0} = \left(1 - \frac{\Delta P_p}{P_0}\right) \times \left(1 + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{f \Delta P_{pq}}{\mathrm{P}_0}\right) = 1 - \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0}$.

Изводът от тези решения е, че **отпадат** фиктивните съвместни ефекти в брутните аналитични индекси и остават само **реалните** ефекти от адитивния факторен анализ. По този начин се установява равенство на общото решение на индексния факторен анализ чрез разликата $I_0 - 1 = \frac{\Delta \mathrm{P}}{P_0} = \frac{\mathrm{P}_0 + \Delta \mathrm{P}_\mathrm{p} + \Delta P_q + \Delta P_{pq}}{P_0} - 1$ с решението от относителната форма на адитивния факторен анализ $\frac{\Delta \mathrm{P}}{P_0} = \frac{\Delta \mathrm{P}_\mathrm{p} + \Delta P_q + \Delta P_{pq}}{P_0}$. Или се потвърждава, че адитивният и индексният анализ са две форми на един и същ дискретен факторен анализ, като адитивната форма е изходна и определяща (Христов, 2015). Всички представени решения за обема на продукцията на отделната стока се обобщават за еднородните съвкупности в следващата точка 2 на статията.

2. Индексен факторен анализ на обема на продукцията от еднородни съвкупности на стоки

Посочените решения на индексния факторен анализ за обема на продукцията на отделната стока в предходната точка 1 могат направо да се **обобщят** за решенията на обема на продукцията от еднородни съвкупности на стоки с **агрегирани данни** за средната цена $\bar{\mathrm{p}} = \frac{\sum p_i q_i}{Q}$ и за общото натурално количество на всички стоки $Q = \sum q_i$. Цените p_i на отделните стоки са средни хронологични за всяка година, а q_i са техните натурални количества. Единичният резултативен индекс за продукцията или зависимата променлива за отделната í-та стока $I_{i0} = \frac{P_{i1}}{P_{i0}}$ се **обобщава** в множествен индекс на маса или просто индекс на продукцията $I_0 = \frac{\sum P_{i1}}{\sum P_{i0}} = \frac{P_1}{P_0}$. Единичният факторен индекс за цената на отделната í-та стока $I_{pi} = \frac{p_{i1}}{p_{i0}}$ се **обобщава** в единичен факторен индекс за средната цена $I_{\bar{p}} = \frac{\sum p_{i1} q_{i1}}{\sum q_{i1}} : \frac{\sum p_{i0} q_{i0}}{\sum q_{i0}} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0}$ на стоките от еднородната съвкупност. От своя страна, единичният факторен индекс за натуралното количество на отделната í-та стока се **обобщава** също в единичен факторен индекс $I_Q = \frac{\sum q_{i1}}{\sum q_{i0}} = \frac{Q_1}{Q_0}$ за общото натурално количество на всички стоки.

По аналогичен начин относителните ефекти за продукцията на отделната í-та стока $\frac{\Delta P_{pi}}{P_{i0}}, \frac{\Delta P_{qi}}{P_{i0}}$ и $\frac{\Delta P_{pqi}}{P_{i0}}$ се **обобщават** в относителни ефекти за еднородните съвкупности $\frac{\Delta \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}}}{P_0}, \frac{\Delta P_Q}{P_0}$ и $\frac{\Delta \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}} Q}}{P_0}$. Те се определят чрез промените на средната цена $\Delta \bar{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0$ и на общото натурално количество на стоките $\Delta Q = Q_1 - Q_0$ също с помощта на знаковата функция на математическия сигнум, $\Delta P_{\bar{p}} = \Delta \bar{p} \times Q_{min}$, $\Delta P_q = \Delta Q \times \bar{p}_{min}$ и $\Delta \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}} Q} = h \Delta \bar{p} \Delta Q$. С техните относителни стойности спрямо базисния обем на продукцията P_0 се съставят съответните нетни и брутни аналитични индекси, които представляват също **обобщения** на нетните и брутните аналитични индекси за продукцията на отделната стока. В резултат на всички обобщения на необходимите показатели индексният факторен анализ за еднородните съвкупности с **агрегираните данни** се решава с единичните факторни индекси за средната цена $I_{\bar{p}} = \frac{\bar{\mathrm{p}}_1}{\bar{\mathrm{p}}_0}$ и за общото натурално количество на стоките $I_Q = \frac{Q_1}{Q_0}$ със съответните нетни и брутни аналитични индекси. Според известните условия от анализа за отделната стока четирите верни и точни решения са следните: при $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q > 1, I_0 = I_{\bar{p}} \times I_Q = I_{\Delta \bar{p}} \times I_{\Delta Q}$, откъдето $I_0 = \frac{\bar{\mathrm{p}}_1}{\bar{\mathrm{p}}_0} \times \frac{Q_1}{Q_0} = \left(1 + \frac{\Delta \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}}}{P_0}\right)\left(1 + \frac{\Delta P_Q}{P_0}\right) =$

$1+\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}+\frac{\Delta P_Q}{P_0}+\frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$, където $\frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}=\frac{\Delta\bar{p}\Delta Q}{P_0}=\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}\times\frac{\Delta P_Q}{P_0}$; при $I_{\bar{p}}<1$ и $I_Q<1, I_0=I_{\bar{p}}\times I_Q=$ в$I_{\Delta\bar{p}}\times$ в$I_{\Delta Q}$, откъдето $I_0=\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0}\times\frac{Q_1}{Q_0}=\left(1-\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}-\frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}\right)\times\left(1-\frac{\Delta P_Q}{P_0}-\frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}\right)=1-\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}-\frac{\Delta P_Q}{P_0}-\frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$, където $\frac{-\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}=\frac{-\Delta\bar{p}\Delta Q}{P_0}=(-1)\frac{-\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}\times\frac{-\Delta P_Q}{P_0}$; при $I_{\bar{p}}>1$ и $I_Q<1, I_0=I_{\bar{p}}\times I_Q=$ в$I_{\Delta\bar{p}}\times I_{\Delta Q}$, откъдето $I_0=\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0}\times\frac{Q_1}{Q_0}=\left(1+\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}+\frac{f\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}\right)\left(1-\frac{\Delta P_Q}{P_0}\right)=1+\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}-\frac{\Delta P_Q}{P_0}$ и при $I_{\bar{p}}<1$ и $I_Q>1, I_0=I_{\bar{p}}\times I_Q=I_{\Delta\bar{p}}\times$ в$I_{\Delta Q}$, откъдето $I_0=\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0}\times\frac{Q_1}{Q_0}=\left(1-\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}\right)\left(1+\frac{\Delta P_Q}{P_0}+\frac{f\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}\right)=1-\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}+\frac{\Delta P_Q}{P_0}$.

Общото решение на индексния факторен анализ се представя със записа на първото решение $1+\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}+\frac{\Delta P_Q}{P_0}+\frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$, където двата нетни ефекта $\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}$ и $\frac{\Delta P_Q}{P_0}$ могат да бъдат с еднакви алгебрични знаци (положителни или отрицателни) или с различни знаци. От решенията са **отпаднали** двата фиктивни положителни съвместни ефекта $\frac{f\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$. Реални съвместни ефекти има само от еднопосочните факторни промени – **положителен** съвместен ефект $\Delta\bar{p}\Delta Q>0$ при $I_{\bar{p}}>1$ и $I_Q>1$ и **отрицателен** съвместен ефект $\Delta\bar{p}\Delta Q<0$ при $I_{\bar{p}}<1$ и $I_Q<1$. При разнопосочните факторни промени **няма** съвместни ефекти.

Интерпретацията на реалните нетни и съвместни ефекти е следната:

Нетният ефект $\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}$ е относителното увеличение или намаление на базисната продукция P_0 само от относителното увеличение или намаление на средната цена $\frac{\Delta\bar{p}}{\bar{p}_0}$. Нетният ефект $\frac{\Delta P_Q}{P_0}$ е относителното увеличение или намаление на P_0 само от относителното увеличение или намаление на общото натурално количество на стоките $\frac{\Delta Q}{P_0}$. Съвместният ефект $\frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$ е относителното увеличение или намаление на P_0 само от съвместните еднопосочни факторни изменения – увеличения $\Delta\bar{p}>0$ и $\Delta Q>0$ или намаления $\Delta\bar{p}<0$ и $\Delta Q<0$. Алгебричната сума на трите относителни ефекта $\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}+\frac{\Delta P_Q}{P_0}+\frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$ трябва да бъде равна на относителното изменение - увеличение или намаление на базисната продукция$\frac{\Delta P}{P_0}$. Следователно от общото решение на индексния факторен анализ с относителните ефекти се получава същото решение на адитивния факторен анализ със същите относителни ефекти, защото $I_0-1=\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}+\frac{\Delta P_Q}{P_0}+\frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$ (Христов, 2016). Задачите, които се решават според условията на всеки един от посочените четири случая на индексния факторен анализ, могат да бъдат в два варианта. Разликата между тях е само във величините на двата нетни ефекта по **абсолютна стойност** $\left|\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}\right| > \left|\frac{\Delta P_Q}{P_0}\right|$ или $\left|\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}\right| < \left|\frac{\Delta P_Q}{P_0}\right|$. Двата варианта се решават с една и съща формула.

С единичните факторни индекса за средната цена $I_{\bar{p}}$ и за общото натурално количество на всички стоки I_Q може да се извършва индексен факторен анализ на продукцията от еднородни съвкупности и с **групирани данни** на стоките. Тази възможност произлиза от еднаквите факторни промени $\Delta\bar{p}$ и ΔQ на всяка еднородна съкупност с агрегираните и с групираните данни. Най-подробната групировка на стоките се получава, когато всяка отделна í-та стока се разглежда като отделна група със своята средна цена p_i и натурално количество q_i (Христов, 2016). По този начин всяка еднородна съвкупност ще има общо **n** групи, колкото е общият брой на отделните стоки. В практиката обаче се използва по-малък брой **m** групи, в които се разпределят всичките **n** на брой стоки. В тези случаи всяка j-та група се характеризира с групова средна цена $\bar{\mathrm{p}}_j$ и натурално количество на стоките q_j в същата j-та група. Връзката между двете групировки е $\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i}q_i}{Q} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_j q_j}{Q} = \bar{p}$, защото $\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{j=1}^{m} q_j = Q$, където $\bar{p}$ е средната претеглена цена на една стока от еднородната съвкупност, Q - общото натурално количество на всички стоки в съвкупността. Или $\bar{p}$ и Q са едни и същи величини от агрегираните и групираните данни на еднородната съвкупност. При групираните данни единичният индекс за продукцията от агрегираните данни I_0 е известен като множествен индекс на маса, множествен синтетичен индекс на продукцията или само като множествен индекс на продукцията (Гатев, 1995). С групираните данни могат да се задълбочат адитивният и индексният анализ на продукцията от еднородните съвкупности с преминаване от единичния факторен индекс за средната цена $I_{\bar{p}}=\frac{\bar{\mathrm{p}}_1}{\bar{\mathrm{p}}_0}$ в множествен факторен индекс за цените. Този индекс се представя с относителните дялове на натуралните количества на стоките през базисната и отчетната година. Или $I_{\bar{p}}=\frac{\bar{\mathrm{p}}_1}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{Q_1} : \frac{\sum p_{i0}q_{i0}}{Q_0} = \frac{\sum p_{i1}\omega_{i1}}{\sum p_{i0}\omega_{i0}}$, където $\omega_{i1} = \frac{q_{i1}}{Q_1}$ са относителните дялове на натуралните количества през отчетната на, $\omega_{i0}.= \frac{q_{i0}}{Q_0}$ са относителните дялове на натуралните количества през базисната година. С промените на посочените относителни дялове и на техния ефект завършва индексният факторен анализ на продукцията от еднородните съвкупности с **новия фактор** - влиянието на промяната на структурата на натуралните количества на стоките през отчетната спрямо базисната година. Аналитично, $I_0 = I_{\bar{p}} \times I_Q = I_{\bar{p}\mathrm{p}} \times I_{\bar{P}}\omega \times I_Q$, където $I_{\bar{p}\mathrm{p}}$ и

$I_{\bar{p}}\omega = I_{str}$ са два субиндекса, на които се подразделя единичният факторен индекс за средната цена $I_{\bar{p}}$=$\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0}$ или множественият факторен индекс за цените $I_{\bar{p}} = \frac{\sum p_{i1}\omega_{i1}}{\sum p_{i0}\omega_{i0}}$. Първият субиндекс $I_{\bar{p}\text{p}}$ измерва средното относително изменение **само** на цените, докато другият субиндекс е структурен $I_{str} = I_{\bar{p}}\omega$, защото измерва **само** влиянието на промените на относителните дялове ω_i на теглата - натуралните количества на стоките в двете претеглени средни цени $\bar{p}_0 = \frac{\sum p_{i0}q_{i0}}{Q_0} = \sum p_{i0}\,\omega_{i0}$ и $\bar{p}_1 = \frac{\sum p_{i1}\omega_{i1}}{Q_1} = \sum p_{i1}\,\omega_{i1}$. Поради ограниченост на изложението и още повече поради отделното прилагане в практиката само на адитивния факторен анализ на разликите на средни равнища, в случая на средните цени $\bar{p}_1 - \bar{p}_0$, както и само на индексния факторен анализ на средната цена $I_{\bar{p}}$=$\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0}$, методиките за тези анализи ще бъдат представени в друга статия.

Специално за индексния факторен анализ на продукцията от съвкупности с групирани данни са известни от **учебната литература** и **статистическата практика** множествените факторни индекси при постоянен състав (Гатев, 1995). Те са индексите за цените на Ласпейрес $I_{P(q_0)} = \frac{\sum p_{i1}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}}$ и на Пааше $I_{P(q_1)} = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i1}}$, както и индексите за физическия обем на продукцията $I_{q(p_0)} = \frac{\sum q_{i1}p_{i0}}{\sum q_{i0}p_{i0}}$ и $I_{q(p_1)} = \frac{\sum q_{i1}p_{i1}}{\sum q_{i0}p_{i1}}$ С тези множествени индекси се образуват две произведения на индекса за цените при постоянен състав q_{i0} или q_{i1} със съответния индекс за физическия обем на продукцията при постоянен състав p_{i1} или p_{i0}. Всяко произведение е равно на множествения индекс на маса или синтетичния индекс за обема на продукцията при променлив състав $I_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i0}}$ (Гатев, 1995). Или $I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q(p_1)} = \frac{\sum p_{i1}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}} \times \frac{\sum q_{i1}p_{i1}}{\sum q_{i0}p_{i1}} = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i0}}$ и $I_0 = I_{p(q_1)} \times I_{q(p_0)} = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i1}} \times \frac{\sum q_{i1}p_{i0}}{\sum q_{i0}p_{i0}} = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i0}}$.

Множествените факторни индекси за цените $I_{p(q_0)}$ и $I_{p(q_1)}$ измерват **средното** относително изменение (увеличение или намаление) на цените при постоянен състав на натуралните количества q_{i0} или q_{i1}. От своя страна, множествените факторни индекси за физическия обем на продукцията $I_{q(p_1)}$ и $I_{q(p_0)}$ измерват **средното** относително изменение (увеличение или намаление) на натуралните количества на стоките при постоянен състав на цените p_{i1}или p_{i0}. Тези индекси са много критикувани, силно оспорвани и дори отхвърляни вече повече от един век, независимо че целият свят работи с тях и до днес. Достатъчно е да отбележим, че националните статистически органи на всички страни в Европейския съюз работят с методиката на Евростат и на международни икономически и финансови институции с множествените индекси за цените и физическия обем на продукцията (System of National Accounts 2008). По общо мнение те са **само** факторни индекси, подобно на единичните факторни индекси за средната цена $I_{\bar{p}}$ и за общото натурално количество на стоките I_Q. За разлика от единичните факторни индекси $I_{\bar{p}}$ и I_Q обаче множествените факторни индекси са **условни** поради постоянния си състав. Той е **аналог** на постоянните базисни или отчетни равнища на всеки фактор, с които се умножават промените на другия фактор при адитивния факторен анализ (Христов, 2016). С такъв подход се получават фиктивни ефекти и от адитивния факторен анализ. Следователно множествените индекси ще съдържат същите фиктивни ефекти както от посочения адитивен анализ. В общия случай те не са равни на точните аналитични индекси за еднозначното решение на индексния факторен анализ, които се съставят с реалните ефекти от предходния адитивен факторен анализ. Причината е, че те не са равни на единичните факторни индекси $I_{\bar{p}}$ и I_Q, защото отразяват **само** промените на двата фактора - цените p_i и натуралните количества на отделните стоки q_i, но не и промените на **третия фактор** - относителните дялове ω_i на натуралните количества на стоките q_i. Следователно множествените факторни индекси при постоянен състав могат да бъдат подходящи за анализ на **два** частни случая. Първият е, когато в индекса за цените на Ласпейрес $I_{P(q_0)} = \frac{\sum p_{i1}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}}$ може да се допусне за постоянния състав q_i, че на практика, например при сравнения на **съседни години,** са изпълнени приблизителните равенства $q_{i1} \approx q_{i0}$. За този частен случай с **приблизително запазване** през отчетната година на същите натурални количества на стоките от базисната година, може да се използва множественият факторен индекс за цените на Ласпейрес $I_{P(q_0)}$ и съответният множествен факторен индекс за физическия обем на продукцията $I_{q_{(p_1)}}$ в индексното равенство $I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q_{(p_1)}}$. Вторият частен случай е когато са изпълнени приблизителни равенства на цените от двете съседни години $\mathrm{p}_{i1} \approx \mathrm{p}_{i0}$ или може да се допусне, че през отчетната година цените са се **запазили** приблизително същите както от предходната базисна година. За определени стоки е възможно постоянство на цените и от по-отдалечена базисна година. Това запазване се отразява в множествения факторен индекс за физическия обем на продукцията $I_{q_{(p_0)}} = \frac{\sum q_{i1}p_{i0}}{\sum q_{i0}p_{i0}}$, който с множествения факторен индекс за цените на Пааше $I_{P(q_1)}$ изпълнява индексното равенство $I_0 = I_{P(q_1)} \times I_{q_{(p_0)}}$. Следователно за този частен случай е подходящ индексът за цените на Пааше

$I_{P(q_1)}$. Специално за този случай искам да обърна внимание, че той се прилага широко в съвременната статистическа практика и с текущото (ежегодно) използване на „постоянни цени“ за пет или десетгодишен период. Следователно не може да се отричат безусловно множествените индекси за цените на Ласпейрес и Пааше, които са съставени при подобни икономически условия на тогавашна Прусия през 60-те години и след това на обединена Германия през 70-те години на 19-ти век. Между посочените два частни случая се намират всички останали случаи на анализ с множествените факторни индекси при постоянен състав. Взаимозависимостите между тях могат да се изследват с формулата на полския индексолог Борткиевич (Гатев, 1995). По мое мнение тя е подходящо аналитично средство за обосновано допускане на приблизителните равенства $q_{i1} \approx q_{i0}$ или $\mathrm{p}_{i1} \approx \mathrm{p}_{i0}$. Искам да обърна внимание обаче и на един **трети** частен случай, който не съм срещал в индексната теория. При него се изпълняват **приблизителни равенства** между единичия факторен индекс $I_{\bar{p}}$ и множествените индекси за цените $I_{P(q_0)}$или $I_{P(q_1)}$, както и между единичния факторен индекс за общото натурално количество на стоките I_Q и множествените факторни индекси за физическия обем на продукцията $I_{q_{(p_0)}}$ или $I_{q_{(p_1)}}$. Този частен случай не е изследван теоретично, но той заедно с другите два частни случая показва, че при определени условия може да се извършва индексен факторен анализ с множествените индекси за цените на Ласпейрес и Пааше. Или обобщено, приложението на условните множествени факторни индекси при постоянен състав може да се сведе до тяхното приближение с единичните факторни индекси за средната цена $I_{\bar{p}}$ и за общото натурално количество на стоките I_Q. За тази цел предлагам да се използват условията за заместване на единичните факторни индекси $I_p = \frac{P_1}{P_0}$ и $I_q = \frac{q_1}{q_0}$ при индексния факторен анализ на продукцията на отделната стока с аналогичните индекси за цените на Ласпейрес $I_{P(q_0)}$ или на Пааше $I_{P(q_1)}$, както и с аналогичните индекси за натуралните количества на отделната стока $I_{q_{(p_0)}}$ или $I_{q_{(p_1)}}$ (Христов, 2015):

при $I_p > 1$ и $I_q > 1$, $I_0 = I_P \times I_q = I_{P(q_0)} \times I_{q_{(p_0)}}$;

при $I_p < 1$ и $I_q < 1$, $I_0 = I_P \times I_q = I_{P(q_1)} \times I_{q_{(p_1)}}$;

при $I_p > 1$ и $I_q < 1$, $I_0 = I_P \times I_q = I_{P(q_1)} \times I_{q_{(p_0)}}$ и

при $I_p < 1$ и $I_q > 1$, $I_0 = I_P \times I_q = I_{P(q_0)} \times I_{q_{(p_1)}}$.

Обобщенията на тези условия за индексния факторен анализ на продукцията от еднородните съвкупности с **групираните данни** на стоките за множествените факторни индекси при постоянен състав и аналитичните индекси са следните:

при $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q > 1$, $I_0 = I_{P(q_0)} \times I_{q_{(p_0)}} = I_{\Delta\bar{p}} \times I_{\Delta Q}$;

при $I_{\bar{p}} < 1$ и $I_Q < 1$, $I_0 = I_{P(q_1)} \times I_{q_{(p_1)}} = \text{в}I_{\Delta\bar{p}} \times \text{в}I_{\Delta Q}$;

при $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q < 1$, $I_0 = I_{P(q_1)} \times I_{q_{(p_0)}} = \text{в}I_{\Delta\bar{p}} \times I_{\Delta Q}$ и

при $I_{\bar{p}} < 1$ и $I_Q > 1$, $I_0 = I_{P(q_0)} \times I_{q_{(p_1)}} = I_{\Delta\bar{p}} \times \text{в}I_{\Delta Q}$,

където аналитичните индекси $I_{\Delta\bar{p}}, I_{\Delta Q}$, в$I_{\Delta\bar{p}}$ и в$I_{\Delta Q}$ са **същите** както в равенствата с единичните факторни индекси $I_{\bar{p}}$ и I_Q.

Крайният извод, който може да се направи е, че множествените факторни индекси при постоянен състав могат да участват в индексния факторен анализ **само като условни приближения** на единичните факторни индекси за средната цена $I_{\bar{p}}$ и за общото натурално количество на стоките I_Q. Тъй като в **общия случай** единичните факторни индекси за средната цена $I_{\bar{p}}$ и за общото натурално количество на стоките I_Q са **точни** факторни индекси, тях **препоръчвам** на практиката за индексния факторен анализ на продукцията от еднородните съвкупности както с **агрегирани**, така и с **групирани** данни на стоките. Единствената разлика между двата вида данни е само в интерпретацията на факторните индекси. При групираните данни на стоките единичният факторен индекс за средната цена $I_{\bar{p}}$ се интерпретира като множествен факторен индекс за **средното** относително изменение (увеличение или намаление) на цените. Другият единичен факторен индекс за общото натурално количество на стоките I_Q се интерпретира като множествен факторен индекс за физическия обем на продукцията, който измерва **средното** относително изменение (увеличение или намаление) на натуралните количества на стоките. Окончателният индексен факторен анализ на продукцията от еднородните съвкупности предлагам да се извършва с трите множествени факторни индекса $\boldsymbol{I_0 = I_{\bar{p}}}$**р** $\times$ $\boldsymbol{I_{str} \times I_Q = I_{\bar{p}}}$**р** $\boldsymbol{\times I_{\bar{p}}\omega \times I_Q}$**,** където ω са относителните дялове на теглата - натуралните количества на стоките $\omega_{i0} = \frac{q_{i0}}{\sum q_{i0}}$ и $\omega_{i1} = \frac{q_{i1}}{\sum q_{i1}}$. Този анализ ще бъде изложен в друга статия. В следващата точка 3 на настоящата статия са решени само примери за еднородни съвкупности с агрегирани данни.

3. Приложения на метода за индексен факторен анализ на продукцията от еднородни съвкупности на стоките

С цел да се установи пряка връзка със същите примери, които са решени с предходния адитивен факторен анализ, тук те са решени в същата последователност както при адитивния анализ (Христов, 2016). Примерите са съставени с реални (фактически) данни за производството на определен вид медицинска апаратура от чуждестранна фирма. Те са за пазарната цена в хиляди левове на един брой от тази апаратура (отделната стока), както и за натуралното количество на всички произведени бройки (стоки) на апаратурата през дадена година. Примерите за статистическите съвкупности обаче са условни, защото цените и натуралните количества са взети от различни години на производство на фирмата с цел да се съставят еднородни съвкупности на едни и същи стоки за една година, които да се различават по цени и натурални количества. По този начин са съставени четири примера за четирите случая на изменение на продукцията от еднородни съвкупности. Два от тях са с еднопосочни факторни промени - едновременни увеличения или намаления на цените и натуралните количества на стоките. Другите два примера са с разнопосочни факторни промени - едновременни увеличения на цените и намаления на натуралните количества на стоките. Във всеки пример всяка факторна промяна е съставена за **общия случай,** според който ако промяната е увеличение на цените, едни стоки са увеличили по-силно своите цени, докато другите са ги намалили по-слабо. Също и ако факторната промяна е увеличение на натуралните количества на стоките, само някои стоки в примера са увеличили своите натурални количества по-силно, докато останалите стоки са ги намалили по-слабо. И обратно, ако в примера факторната промяна е намаление на цените на стоките, някои от тях са намалили своите цени по-силно, докато останалите стоки са ги увеличили по-слабо. Същото се отнася и за случая, когато факторната промяна е намаление на натуралните количества на стоките. Тогава ако някои стоки са намалили натуралните си количества по-силно, другите стоки са увеличили своите натурални количества по-слабо. По този начин всяка факторна промяна на цените е с тяхно **преобладаващо** увеличение или намаление и всяка факторна промяна на натуралните количества на стоките е също **преобладаващо** увеличение или намаление. Така са **избегнати** частните случаи при анализите със статистически съвкупности, когато **всички стоки** във всеки пример са увеличили или намалили своите цени, както и увеличили или намалили своите натурални количества. Тъй като индексният факторен анализ на продукцията от еднородните съвкупности е изведен със същите примери от адитивния факторен анализ, публикувани в моята предходна статия, препоръчвам на читателя да се запознае първо с нея (Христов, 2016).

3.1. Индексен факторен анализ на продукцията с разнопосочни факторни промени $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q < 1$

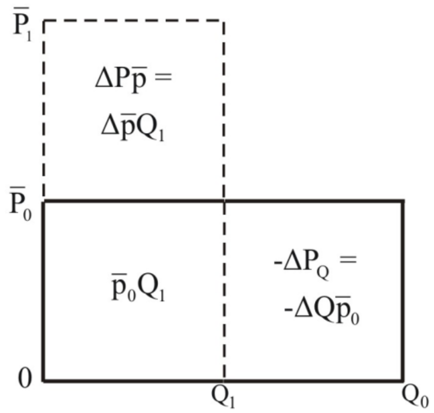
Първият пример за еднородни съвкупности на стоките (медицинска апаратура) е поместен в табл. 1.

1. Цени и натурални количества на стоките и техните влияния върху изменението на обема на продукцията

Стоки	Базисна година			Отчетна година			Ефекти от адитивния анализ			
	p_{i0} хил. лв.	q_{i0} бр.	$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.	p_{i1} хил. лв.	q_{i1} бр.	$p_{i1}q_{i1}$ хил. лв.	$\Delta p_i q_{im}$ хил. лв.	$\Delta q_i p_{im}$ хил. лв.	$h_i \Delta p_i \Delta q_i$ хил. лв.	$p_{i1}q_{i1}$-$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.
	1	**2**	**3=1x2**	**4**	**5**	**6=4x5**	**7**	**8**	**9**	**10=7+8+9**
А	40	40	1600	80	50	4000	+1600	+400	+400	+2400
Б	60	50	3000	50	30	1500	-300	-1000	-200	-1500
В	50	50	2500	90	30	2700	+1200	-1000	-	+200
Г	60	60	3600	50	70	3500	-600	+500	-	-100
Общо	**53.5**	**200**	**10700**	**65.0**	**180**	**11700**	**+1900**	**-1100**	**+200**	**+1000**

Според агрегираните (обобщени) данни за цялата еднородна съвкупност на четирите стоки на последния ред на табл. 1 обемите на продукцията за базисната и отчетната година са $P_0 = 10700$ хил. лв. и $P_1 = 11700$ хил. лв., с които индексът за продукцията е $I_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{11700}{10700} = 1.0935$, или тя се е увеличила с 9.35%. Единичният факторен индекс за средната цена е $I_{\bar{p}} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} = \frac{65.0}{53.5} = 1.2150$, или тя е нараснала с 21.50%. Другият единичен факторен индекс за общото натурално количество на стоките е $I_Q = \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{180}{200} = 0.9000$, или това количество е намаляло с 10%. С тези факторни индекси, $I_0 = 1.2150 \times 0.9000 = 1.0935$. При $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q < 1$ двата аналитични индекса с ефектите от посочените факторни промени са брутният за относителната промяна на средната цена в$I_{\Delta\bar{p}} = 1 + \frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0} + \frac{f\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$, който е равен по условие на факторния индекс за средната цена $I_{\bar{p}} = 1.2150$ и нетният аналитичен индекс от относителната промяна на общото натурално количество на стоките $I_{\Delta Q} = 1 - \frac{\Delta P_Q}{P_0}$, който е също равен по условие на факторния индекс $I_Q = 0.900$. Двата нетни ефекта в тези аналитични индекси са $\Delta\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}} = 2070$ хил. лв. и $\Delta\mathrm{P}_{Q} = -1070$ хил. лева. Те са определени от предходния адитивен факторен анализ (Христов, 2016), но могат отново да се пресметнат, като се използва знаковата функция на математическия сигнум за този анализ в предходната точка 2 на настоящата статия. С тази функция нетният ефект $\Delta\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}} = (\bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0)$ Qmin $= 11.5 \times 180 = 2070$ хил. лв., откъдето $\frac{\Delta\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}}}{P_0} = \frac{2070}{10700} = 0.1935$. Другият нетен ефект $\Delta\mathrm{P}_{Q} = (Q_1 - Q_0)\bar{\mathrm{p}}_{min} = -20 \times 53.5 = -1070$ хил. лв., откъдето $\frac{\Delta P_Q}{P_0} = \frac{-1070}{10700} = -0.1000$. Фиктивният съвместен ефект $\frac{f\Delta\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}Q}}{P_0}$ се намира с разликата $\Delta\text{в}I_{\Delta\bar{\mathrm{p}}} - \frac{\Delta\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}}}{P_0} = 0.2150 - 0.1935 = 0.0215$. С всички ефекти двата аналитични индекси са $\text{в}I_{\Delta\bar{\mathrm{p}}} = 1 + \frac{\Delta\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}}}{P_0} + \frac{f\Delta\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}Q}}{P_0} = 1 + 0.1935 + 0.0215 = 1.2150$ и $I_{\Delta Q} = 1 - \frac{\Delta P_Q}{P_0} = 1 - 0.1000 = 0.9000$. Индексният факторен анализ на този пример може графично да се представи чрез адитивния факторен анализ на фиг. 1.

Фиг. 1



Фигура 1, както и всички следващи фигури са същите както за адитивния факторен анализ (Христов, 2016). Те са условни, защото не съответстват на данните за средните цени $\bar{\mathrm{p}}$, общите натурални количества на стоките Q и ефектите от адитивния факторен анализ. Те са съставени само за да покажат колкото се може по-ясно отделните случаи на факторните промени $\Delta\bar{\mathrm{p}}$ и ΔQ, както и техните ефекти. На фигурата ясно се вижда, че за разглеждания случай **няма** съвместен ефект, откъдето положителният фиктивен съвместен ефект $\frac{f\Delta\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}Q}}{P_0} = 0.0215$ във факторния индекс $I_{\bar{p}} > 1$ и брутният аналитичен индекс $\text{в}I_{\Delta\bar{\mathrm{p}}} > 1$ за средната цена е реално несъществуващ.

С посочените по-горе ефекти в аналитичните индекси се получава следното решение на разглеждания пример с агрегираните данни: $I_0 = $ в$I_{\Delta\bar{p}} \times I_{\Delta Q} = (1 + 0.1935 + 0.0215)(1 - 0.1000) \quad = 1 + 0.1935 + 0.0215 - 0.1000 - 0.1935 \times 0.1000 - 0.0215 \times 0.1000 = 1 + 0.1935 + 0.0215 - 0.1000 - 0.0194 - 0.0021 = 1 + 0.1935 - 0.1000 + 0.0215 - 0.0215 = 1 + 0.0935 = 1.0935$. Фиктивният ефект е отпаднал от решението и в него са останали само реалните нетни ефекти. Същото решение отговаря на всички условия за верен и точен индексен анализ. То съответства на решението с относителната форма на адитивния факторен анализ $\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta P_{\bar{p}} - \Delta P_Q}{P_0} = \frac{2070-1070}{10700} = \frac{1000}{10700} = 0.0935$ (Христов, 2016). Интерпретацията на получените резултати е, че само от увеличението на средната цена с 21.50% продукцията се е увеличила с 19.35%, докато само от намалението на натуралното количество на стоката с 10%, тя е намаляла също с 10%. Разликата между увеличението на средната цена с 21.50% и фактическото нарастване на продукцията с 19.35% се дължи фиктивният съвместен ефект в увеличението на средната цена с 2.15%. Или продукцията фактически се е увеличила с 19.35% - 10.00% = 9.35%.

Със същите данни за цените и натуралните количества на стоките в табл. 1 двата множествени факторни индекса за цените при постоянен състав на Ласпейрес и Пааше са $I_{P(q_0)} = \frac{\sum p_{i1} q_{i0}}{\sum p_{i0} q_{i0}} = \frac{13200}{10700} = 1.2336$ и $I_{P(q_1)} = \frac{\sum p_{i1} q_{i1}}{\sum p_{i0} q_{i1}} = \frac{11700}{9500} = 1.2316$. Те не са равни на единичния факторен индекс за средната цена $I_{\bar{p}} = 1.2150$. Съответните множествени факторни индекси за физическия обем на продукцията са $I_{q(p_1)} = \frac{\sum q_{i1} p_{i1}}{\sum q_{i0} p_{i1}} = \frac{11700}{13200} = 0.8864$ и $I_{q(p_0)} = \frac{\sum q_{i1} p_{i0}}{\sum q_{i0} p_{i0}} = \frac{9500}{10700} = 0.8879$. Те също не са равни на единичния факторен индекс за общото натурално количество на стоките $I_Q = 0.9000$. Следователно множествените факторни индекси при постоянен състав не са верни за разглеждания случай с разнопосочните факторни промени $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q < 1$, въпреки че изпълняват индексните равенства $I_0 = I_{P(q_0)} \times I_{q(p_1)} = 1.2336 \times 0.8864 = 1.0935$ и $I_0 = I_{P(q_1)} \times I_{q(p_0)} = 1.2316 \times 0.8879 = 1.0935$.

3.2. Индексен факторен анализ на продукцията с разнопосочни факторни промени $I_{\bar{p}} < 1$ и $I_Q > 1$

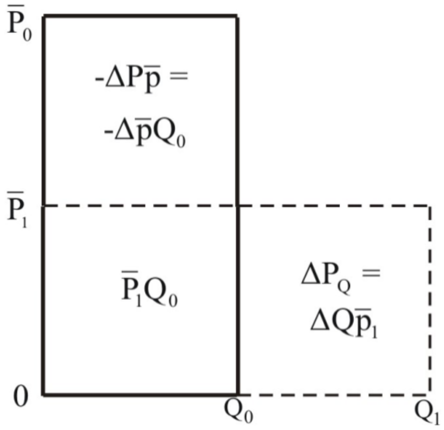
Примерът за този анализ е обратен на предходния в точка 3.1, защото е с разменени места на данните за базисната и отчетната година. По тази причина ефектите от адитивния факторен анализ са същите по абсолютна стойност както ефектите от предходния пример, но са с обратни алгебрични знаци. Данните за разглеждания пример са поместени в табл. 2.

2. Цени и натурални количества на стоките и техните влияния върху изменението на обема на продукцията

Стоки	Базисна година			Отчетна година			Ефекти от адитивния анализ			
	p_{i0} хил. лв.	q_{i0} бр.	$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.	p_{i1} хил. лв.	q_{i1} бр.	$p_{i1}q_{i1}$ хил. лв.	$\Delta p_i q_{im}$ хил. лв.	$\Delta q_i p_{im}$ хил. лв.	$h_i \Delta p_i \Delta q_i$ хил. лв.	$p_{i1}q_{i1}$-$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.
	1	**2**	**3=1x2**	**4**	**5**	**6=4x5**	**7**	**8**	**9**	**10=7+8+9**
1	80	50	4000	40	40	1600	-1600	-400	-400	-2400
2	50	30	1500	60	50	3000	+300	+1000	+200	+1500
3	90	30	2700	50	50	2500	-1200	+1000	-	-200
4	50	70	3500	60	60	3600	+600	-500	-	+100
Общо	**65.0**	**180**	**11700**	**53.5**	**200**	**10700**	**-1900**	**+1100**	**-200**	**-1000**

Според агрегираните показатели за четирите стоки индексът за продукцията е $I_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{10700}{11700} = 0.9145$, или тя е намаляла с 8.55%. Двата факторни индекса са съответно $I_{\bar{p}} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} = \frac{53.5}{65.0} = 0.8231$ и $I_Q = \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{200}{180} = 1.1111$. Според тях средната цена е намаляла със 17.69%, докато общото натурално количество на стоките се е увеличило с 11.11%. Индексното равенство с тези единични факторни индекси е $I_0 = I_{\bar{p}} \times I_Q = 0.8231 \times 1.1111 = 0.9145$. При $I_{\bar{p}} < 1$ и $I_Q > 1$ двата аналитични индекса, които са равни по условие на факторните, са нетният $I_{\Delta\bar{p}} = 1 - \frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0} = 0.8231$ и брутният в$I_{\Delta Q} = 1 + \frac{\Delta P_Q}{P_0} + \frac{f\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0} = 1.1111$. Двата нетни ефекта $\Delta P_{\bar{p}}$ и ΔP_Q са определени от предходния адитивен факторен анализ със знаковата функция на математическия сигнум (Христов, 2016). С данните от табл. 2 същите са $\Delta P_{\bar{p}} = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)Qmin = -11.5 \times 180 = -2070$ хил. лв. и $\Delta P_Q = (Q_1 - Q_0)\bar{p}_{min} = 20 \times 53.5 = 1070$ хил. лева. Съответните нетни относителни ефекти са $\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0} = \frac{-2070}{11700} = -0.1769$ и $\frac{\Delta P_Q}{P_0} = \frac{1070}{11700} \approx 0.0914$. Фиктивният съвместен ефект $\frac{f\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$ е разликата $\Delta I_Q - \frac{\Delta P_Q}{P_0} \approx 0.1111 - 0.0915 \approx 0.0196$. С всички ефекти индексният факторен анализ на разглеждания пример може също да се представи графично чрез адитивния факторен анализ на фиг. 2.

Фиг. 2



На фиг. 2 също ясно се вижда, че и за разглеждания случай с разнопосочните факторни промени $I_{\bar{p}} < 1$ и $I_Q > 1$ **няма** съвместен ефект. Следователно положителният фиктивен съвместен ефект $\frac{f\Delta \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}Q}}{P_0} = 0.0196$ във факторния индекс $I_Q > 1$ и брутния аналитичен индекс в$I_{\Delta Q} > 1$ за общото натурално количество на стоките е също реално несъществуващ.

Решението на индексния факторен анализ на този пример с агрегираните данни е $I_0 = I_{\bar{\mathrm{p}}} \times I_Q = I_{\Delta\bar{\mathrm{p}}} \times \text{в}I_{\Delta Q}$, откъдето $I_0 = 0.8231 \times 1.1111 = (1 - 0.1769)(1 + 0.0914 + 0.0196) = 1 - 0.1769 + 0.0914 + 0.0196 - 0.1769 \times 0.0914 - 0.1769 \times 0.0196 = 1 - 0.1769 + 0.0914 + 0.0196 - 0.0162 - 0.0034 = 1 - 0.1769 + 0.0914 + 0.0196 - 0.0196 = 1 - 0.0855 = 0.9145$. Крайните резултати на това решение показват, че от него е отпаднал фиктивният положителен съвместен ефект $\frac{f\Delta \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}Q}}{P_0} = 0.0196$. Останалите ефекти са реални величини от относителната форма на адитивния факторен анализ $\frac{\Delta \mathrm{P}}{P_0} = \frac{-\Delta \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}} + \Delta \mathrm{P}_Q}{\mathrm{P}_0} = \frac{-2070+1070}{11700} = \frac{-1000}{11700} = -0.0855$ (Христов, 2016). Същото решение отговаря на всички условия за верен и точен индексен анализ. Неговата интерпретация е, че продукцията е намаляла със 17.69% само от намалението на средната цена също със 17.69% и се е увеличила с 9.14% само от увеличението на общото натурално количество на стоките с 11.11%. Алгебричната сума на двата нетни ефекта е 9.14%−17.69%= −8.55%, с които е намаляла продукцията.

Двата множествени индекса за цените при постоянен състав на Ласпейрес и Паше имат следните стойности: $I_{P(q_0)} = \frac{\sum p_{i1}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}} = \frac{9500}{11700} = 0.8120$ и $I_{P(q_1)} = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i1}} = \frac{10700}{13200} = 0.8106$. Нито един от тях не е равен на единичния факторен индекс за средната цена $I_{\bar{p}} = 0.8231$. Другите два множествени факторни индекса за физическия обем на продукцията са $I_{q(p_1)} = \frac{\sum q_{i1}p_{i1}}{\sum q_{i0}p_{i1}} = \frac{10700}{9500} = 1.1263$ и $I_{q(p_0)} = \frac{\sum q_{i1}p_{i0}}{\sum q_{i0}p_{i0}} = \frac{13200}{11700} = 1.1282$. Те също не са равни на единичния факторен индекс за общото натурално количество на стоките $I_Q = 1.1111$. Индексните равенства с тези множествени факторни индекси са изпълнени, защото $I_0 = I_{P(q_0)} \times I_{q(p_1)} = о.8120 \times 1.1263 = 0.9145$ и $I_0 = I_{P(q_1)} \times I_{q(p_0)} = 0.8106 \times 1.1282 = 0.9145$. Или индексните равенства са изпълнени, но множествените факторни индекси при постоянен състав не са верни. Обобщено и за двата примера с разнопосочните факторни промени при $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q < 1$, както и при $I_{\bar{p}} < 1$ и $I_Q > 1$, множествените факторни индекси при постоянен състав са **неверни.** Изводът от тези примери е, че критиците и отрицателите на индексния факторен анализ с множествените факторни индекси имат право като ги отричат (Цветков, 2015). При следващите примери с еднопосочните факторни промени обаче изводът е точно обратен. Преди да отидем при тях, искам да покажа реципрочността на индексите за двата взаимообратими примера. Според тази реципрочност всички индекси за втория пример са равни на реципрочните индекси от първия пример. Или $I_0 = 0.9145$ за втория пример е реципрочен на индекса $I_0 = 1.0935$ от първия пример, защото $I_0 = \frac{1}{1.0935} = 0.9145$. По аналогичен начин и единичните факторни индекси $I_{\bar{p}} = 0.8231$ и $I_Q = 1.1111$ за втория пример са реципрочни на факторните индекси $I_{\bar{p}} = 1.2150$ и $I_Q = 0.9000$ от първия пример, защото $I_{\bar{p}} = \frac{1}{1.2150} = 0.8231$ и $I_Q = \frac{1}{0.9000} = 1.1111$. Освен с адитивен факторен анализ положителните относителни ефекти (реалният и фиктивният) могат да бъдат получени и с правилото за реципрочност на индексите на двата взаимообратими примери. Например реалният положителен относителен ефект за случая с $I_Q > 1$ се определя с реципрочния факторен индекс $I_Q < 1$ от предходния пример с $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q < 1$ в точка 3.1. Същите реципрочности важат и за множествените факторни индекси при постоянен състав.

3.3. Индексен факторен анализ на продукцията с еднопосочни факторни промени $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q > 1$

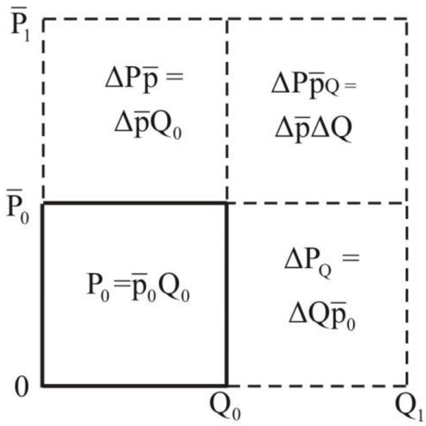
Следващите два примера са с еднопосочни факторни промени, от които възникват реални съвместни ефекти. Те са съставени **с нарочната цел** за хипотетичния, много рядък на практика трети частен случай, при който може да се допусне равенство на единичния факторен индекс за средната цена $I_{\bar{p}}$ с един от множествените факторни индекси за цените $I_{P(q_0)}$ или $I_{P(q_1)}$. Първият пример е с едновременни увеличения на средната цена $\overline{\mathrm{p}}$ и на общото натурално количество Q. Данните за него са представени в табл. 3.

3. Цени и натурални количества на стоките и техните влияния върху изменението на обема на продукцията

Стоки	Базисна година			Отчетна година			Ефекти от адитивния анализ			
	p_{i0} хил. лв.	q_{i0} бр.	$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.	p_{i1} хил. лв.	q_{i1} бр.	$p_{i1}q_{i1}$ хил. лв.	$\Delta p_i q_{im}$ хил. лв.	$\Delta q_i p_{im}$ хил. лв.	$h_i \Delta p_i \Delta q_i$ хил. лв.	$p_{i1}q_{i1}$-$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.
	1	**2**	**3=1x2**	**4**	**5**	**6=4x5**	**7**	**8**	**9**	**10=7+8+9**
1	40	40	1600	80	60	4800	+1600	+800	+800	+3200
2	60	50	3000	40	40	1600	-800	-400	-200	-1400
3	40	50	2000	60	40	2400	+800	-400	-	+400
4	60	40	2400	50	60	3000	-400	+1000	-	+600
Общо	**50**	**180**	**9000**	**59**	**200**	**11800**	**+1200**	**+1000**	**+600**	**+2800**

От агрегираните данни за цялата еднородна съвкупност на стоките в табл. 3 индексът за продукцията е $I_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{11800}{9000} = 1.3111$, или тя е нараснала с 31.11%. Двата единични факторни индекса са $I_{\bar{p}} = \frac{\overline{\mathrm{P}}_1}{\overline{\mathrm{P}}_0} = \frac{59}{50} = 1.1800$ и $I_Q = \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{200}{180} = 1.1111$, с които $I_0 = I_{\overline{\mathrm{p}}} \times I_Q = 1.1800 \times 1.1111 = 1.3111$. При $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q > 1$ двата аналитични индекса са **нетни** $I_{\Delta\overline{\mathrm{p}}} = 1 + \frac{\Delta \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{p}}}}{P_0} = 1.1800$ и $I_Q = 1 + \frac{\Delta P_Q}{P_0} = 1.1111$. Двата нетни ефекта $\Delta \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{p}}}$ и ΔP_Q са определени от предходния адитивен факторен анализ (Христов, 2016), но същите могат да се пресметнат и тук с данните от табл. 3. Първият ефект $\Delta \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{p}}} = (\overline{\mathrm{p}}_1 - \overline{\mathrm{p}}_0)Qmin = 9 \times 180 = 1620$ хил. лв., с който $\frac{\Delta \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{p}}}}{P_0} = \frac{1620}{9000} = 0.1800$. Другият ефект $\Delta P_Q = (Q_1 - Q_0)\bar{p}_{min} = 20 \times 50 = 1000$ хил. лв., откъдето $\frac{\Delta P_Q}{P_0} = \frac{1000}{9000} = 0.1111$. С тези ефекти се изпълняват условията за равенства между факторните и аналитичните индекси $I_{\bar{p}} = I_{\Delta\overline{\mathrm{p}}} = 1.1800$ и $I_Q = I_{\Delta Q} = 1.1111$. Индексният факторен анализ може да се представя графично също чрез адитивния факторен анализ на фиг. 3.

Фиг. 3



На фиг. 3 се вижда, че в този случай с едновременните увеличения на $\overline{p}$ и Q възниква **реален** положителен съвместен ефект $\frac{\Delta P_{\overline{p}Q}}{P_0} = \frac{\Delta P_{\overline{p}}}{P_0} \times \frac{\Delta P_Q}{P_0} = 0.1800 \times 0.1111 = 0.0200$. С всички изчислени факторни и аналитични индекси решението на индексния факторен анализ на този пример с агрегираните данни е $I_0 = I_{\overline{p}} \times I_Q = I_{\Delta\overline{p}} \times I_{\Delta Q} = (1 + 0.1800)(1 + 0.1111) = 1 + 0.1800 + 0.1111 + 0.1800 \times 0.1111 = 1 + 0.1800 + 0.1111 + 0.0200 = 1 + 0.3111 = 1.3111$. Искам да обърна внимание на читателя, че тъй като двата единични факторни индекса $I_{\overline{p}}$ и I_Q измерват само нетни факторни промени, индексният факторен анализ може да се извършва и само с тях, без аналитичните индекси. В този случай решението е $I_0 = I_{\overline{p}} \times I_Q = (1 + \Delta I_{\overline{p}})(1 + \Delta I_Q) = 1 + \Delta I_{\overline{p}} + \Delta I_Q + \Delta I_{\overline{p}}\Delta I_Q = 1 + 0.1800 + 0.1111 + 0.1800 \times 0.1111 = 1.3111$, където относителните прирасти $\Delta I_{\overline{p}} = I_{\overline{p}} - 1 = 1.1800 - 1 = 0.1800,$ $\Delta I_Q = \Delta_Q - 1 = 1.1111 - 1 = 0.1111$ и $\Delta I_{\overline{p}}\Delta I_Q = 0.1800 \times 0.1111 = 0.0200$. Това решение е известно и се прилага за факторен анализ във всички области на живота. Със съответните числа то е **същото,** както предходното по-горе. Неговата интерпретация е, че само от увеличението на средната цена с 18.00% продукцията е нараснала също с 18.00%, както и само от увеличението на общото натурално количество на стоките с 11.11% тя е нараснала също с 11.11%. Освен с тези нетни ефекти продукцията се е увеличила и с още 2.00% от съвместните **преобладаващи** увеличения на цените и натуралните количества (табл. 3). Или общото относително увеличение на продукцията е равно на сумата на факторните прирасти 18.00%+11.11%+2.00% = 31.11%.

Вероятно поради простотата на формулите за адитивния и индексния факторен анализ при едновременните увеличения на двата фактора само те се дават в учебниците и ръководствата на статистика. Същите формули обаче са **неверни** за анализите на другите три случая с различните промени на двата фактора и различните ефекти.

Множествените факторни индекси за цените на Ласпейрес и Пааше са $I_{P(q_0)} = \frac{\sum p_{i1}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}} = \frac{10200}{9000} = 1.1333$ и $I_{P(q_1)} = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i1}} = \frac{11800}{10000} = 1.1800$ Следователно примерът с $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q > 1$ не може да се реши с множествения факторен индекс за цените на Ласпейрес, но може с множествения факторен индекс на Пааше, защото той е **равен** на единичния факторен индекс за средната цена $I_{\bar{p}} = 1.1800$. Другият множествен факторен индекс за физическия обем на продукцията, с който се изпълнява индексното равенство, е $I_{q(p_0)} = \frac{\sum q_{i1}p_{i0}}{\sum q_{i0}p_{i0}} = \frac{10000}{9000} = 1.1111$. Той е също **равен** на единичния факторен индекс за общото натурално количество на всички стоки $I_Q = 1.1111$. Или с тези множествени факторни индекси при постоянен състав се изпълнява индексното во$I_0 = I_{P(q_1)} \times I_{q(p_0)} = 1.1800 \times 1.1111 = 1.3111$. Интерпретацията е известна, но е с множествените индекси за средните относителни увеличения на цените и натуралните количества на стоките и на преобладаващото съвместно влияние от тези увеличения.

3.4. Индексен факторен анализ на продукцията с еднопосочни факторни промени $I_{\bar{p}} < 1$ и $I_Q < 1$

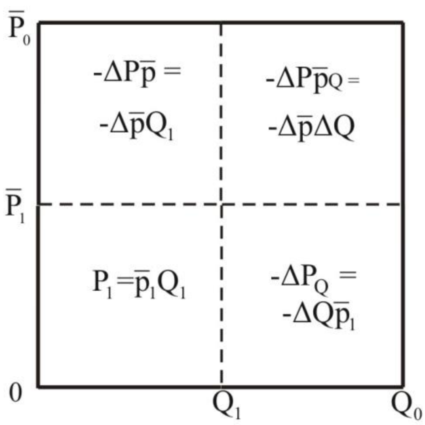
Примерът с посочените факторни намаления на цените и натуралните количества на стоките е обратен на предходния пример с положителните факторни промени. Данните за него са изложени в табл. 4.

4. Цени и натурални количества на стоките и техните влияния върху изменението на обема на продукцията

Стоки	Базисна година			Отчетна година			Ефекти от адитивния анализ			
	p_{i0} хил. лв.	q_{i0} бр.	$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.	p_{i1} хил. лв.	q_{i1} бр.	$p_{i1}q_{i1}$ хил. лв.	$\Delta p_i q_{im}$ хил. лв.	$\Delta q_i p_{im}$ хил. лв.	$h_i \Delta p_i \Delta q_i$ хил. лв.	$p_{i1}q_{i1}$-$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.
	1	**2**	**3=1x2**	**4**	**5**	**6=4x5**	**7**	**8**	**9**	**10=7+8+9**
1	80	60	4800	40	40	1600	-1600	-800	-800	-3200
2	40	40	1600	60	50	3000	+800	+400	+200	+1400
3	60	40	2400	40	50	2000	-800	+400	-	-400
4	50	60	3000	60	40	2400	+400	-1000	-	-600
Общо	**59**	**200**	**11800**	**50**	**180**	**9000**	**-1200**	**-1000**	**-600**	**-2800**

От агрегираните данни в тази таблица индексът за продукцията е $I_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{9000}{11800} = 0.7627$, или тя е намаляла с 23.73%. Двата единични факторни индекса са $I_{\bar{p}} = \frac{\bar{P}_1}{\bar{P}_0} = \frac{50}{59} = 0.8475$ и $I_Q = \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{180}{200} = 0.9000$, с които $I_0 = I_{\bar{p}} \times I_Q = 0.8475 \times 0.9000 = 0.7627$. За разлика от предходния пример тук двата аналитични индекса не са нетни, а **брутни,** защото освен нетните отрицателни ефекти $\frac{-\Delta P_{\bar{p}}}{P_0}$ и $\frac{-\Delta P_Q}{P_0}$ съдържат и **реалния отрицателен съвместен ефект** $\frac{-\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$. Или в $I_{\Delta\bar{p}} = 1 - \frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0} - \frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0} = 0.8475$ и в $I_{\Delta Q} = 1 - \frac{\Delta P_Q}{P_0} - \frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0} = 0.9000$. Всички отрицателни ефекти са определени, както ефектите в другите примери от предварителния адитивен факторен анализ (Христов, 2016). Същите ефекти могат да се пресметнат и тук с данните от табл. 4. Първият $\Delta P_{\bar{p}} = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)Qmin = -9 \times 180 = -1620$ хил. лв., откъдето относителният ефект е $\frac{-\Delta P_{\bar{p}}}{P_0} = \frac{-1620}{11800} = -0.1373$. Вторият нетен ефект $\Delta P_Q = (Q_1 - Q_0)\bar{p}_{min} = -20 \times 50 = -1000$ хил. лв., откъдето $\frac{-\Delta P_Q}{P_0} = \frac{-1000}{11800} = -0.0847$. Отрицателният съвместен ефект се получава с израза $\Delta P_{\bar{p}Q} = \text{h } (-\Delta\bar{p})(-\Delta Q) = -(-9)(-20) = -180$ хил. лв., откъдето $\frac{-\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0} = \frac{-180}{11800} = -0.0153$. С всички относителни ефекти двата аналитични индекса са $I_{\Delta\bar{p}} = 1 - 0.1373 - 0.0153 = 1 - 0.1526 \approx 0.8475$ и $\Delta I_Q = 1 - 0.0847 - 0.0153 = 1 - 0.1000 = 0.9000$. С тях са изпълнени условията за равенства на факторните с аналитичните индекси $I_{\bar{p}} = I_{\Delta\bar{p}} = 0.8475$ и $I_Q = I_{\Delta Q} = 0.9000$. Индексният факторен анализ може също графично да се представи чрез адитивния факторен анализ на фиг. 4.

Фиг. 4



С всички факторни и аналитични индекси, решението на индексния факторен анализ на примера с агрегираните данни е $I_0 = I_{\bar{\mathrm{p}}} \times I_Q = \text{в}I_{\Delta\bar{\mathrm{p}}} \times \text{в}I_{\Delta Q} = (1 - 0.1373 - 0.0153) \times (1 - 0.0847 - 0.0153) = 1 - 0.1373 - 0.0153 - 0.0847 + (-0.1373) \times (-0.0847) + (-0.0153)(-0.0847) - 0.0153 + (-0.1373)(-0.0153) + (-0.0153) \times (-0.0153) = 1 - 0.1373 - 0.0153 - 0.0847 + 0.0116 + 0.0013 - 0.0153 + 0.0021 + 0.0002 = 1 - 0.1373 - 0.0847 - 0.0153 + 0.0153 - 0.0153 = 1 - 0.1373 - 0.0847 - 0.0153 = 1 - 0.2373 = 0.7627$. В това решение е отпаднал единият от двата реални отрицателни съвместни ефекта $-\frac{\Delta \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}Q}}{P_0} = -0.0153$ и се получават същите три реални отрицателни ефекта, както от относителната форма на адитивния факторен анализ. $\frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{P}_0} = \frac{-\Delta \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}} - \Delta \mathrm{P}_Q - \Delta \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{p}}Q}}{\mathrm{P}_0} = \frac{-1620-1000-180}{118000} = \frac{-2800}{11800} = -0.2373$ (Христов, 2016). Същото решение отговаря на условията за верен и точен индексен факторен анализ. При $I_{\bar{p}} < 1$ и $I_Q < 1$ решението на индексния факторен анализ не може да се извършва обаче само с тези единични факторни индекси както в случая с $I_{\bar{p}} > 1$ и $I_Q > 1$. Решението тук може да бъде или с аналитичните брутни индекси в$I_{\Delta\bar{\mathrm{p}}}$и в$I_{\Delta Q}$, които съдържат само реални отрицателни ефекти, или с правилото за реципрочност на индексите при взаимообратимите случаи на факторните промени.

Интерпретацията на резултатите от анализа е, че само от намалението на средната цена с 15.25% продукцията е намаляла с 13.73%, а само от намалението на натуралното количество на стоките с 10.00% тя е намаляла с 8.47%. Отделно само от едновременните съвместни преобладаващи намаления на средната цена и натуралното количество на стоките, продукцията е намаляла с 1.53% (табл. 4). Или от нетните и съвместни отрицателни влияния на двата фактора продукцията е намаляла общо с −13.73%−8.47%−1.53%= −23.73%.

Множественият факторен индекс за цените на Ласпейрес $I_{P(q_0)} = \frac{\sum p_{i1} q_{i0}}{\sum p_{i0} q_{i0}} = \frac{10000}{11800} = 0.8475$. Или $I_{P(q_0)}$ е верен, защото е **равен** на единичния факторен индекс за средната цена $I_{\bar{p}} = 0.8475$. Съответният множествен факторен индекс за физическия обем на продукцията $I_{q(P_1)} = \frac{\sum q_{i1} p_{i1}}{\sum q_{i0} p_{i1}} = \frac{9000}{10000} = 0.9000$. Или и този множествен факторен индекс е верен, защото е **равен** на единичния факторен индекс за общото натурално количество на стоките $I_Q = 0.9000$. С двата верни множествени индекса при постоянен състав се изпълнява индексното равенство: $I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q_{(p_1)}} = 0.8475 \times 0.9000 = 0.7627$.

Другата двойка множествени индекси **не са верни,** защото не са равни на $I_{\bar{p}}$и I_Q. Множественият факторен индекс за цените на Пааше $I_{P(q_1)} = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i1}} = \frac{9000}{10200} = 0.8824$ или не е равен на $I_{\bar{p}} = 0.8475$. Съответният множествен факторен индекс за физическия обем на продукцията $I_{q(p_0)} = \frac{\sum q_{i1}p_{i0}}{\sum q_{i0}p_{i0}} = \frac{10200}{11800} = 0.8644$. Или той също не е равен на $I_Q = 0.9000$.

В заключение, примерът с едновременните факторни намаления $I_{\bar{p}} < 1$ и $I_Q < 1$ може да се реши с множествените факторни индекси при постоянен състав за цените $I_{p(q_0)}$ на Ласпейрес и за физическия обем на продукцията $I_{q_{(p_1)}}$. Интерпретацията на решението с тези индекси е за средното относително намаление на цените, средното относително намаление на натуралните количества на стоките и съвместните преобладаващи намаления на цените и натуралните количества.

Общият извод от решенията на двата примера с равенствата $I_{P(q_1)} = I_{\bar{p}} > 1$ и $I_{q_{(p_0)}}. = I_Q > 1$ и $I_{P(q_0)} = I_{\bar{p}} < 1$ и $I_{q_{(p_1)}}. = I_Q < 1$ е, че на практика те могат да се срещнат като **частни случаи** с приблизителни равенства на множествените и единичните индекси. Именно тази приблизителност позволява според мен да се използват множествените факторни индекси при постоянен състав, а не да се отричат безусловно, както си мислят някои. За двата взаимообратими случая с еднопосочните факторни промени важи същото правило за реципрочност на техните индекси. Или обобщено, при всички еднопосочни и разнопосочни факторни промени може с него да се извършва само индексен факторен анали на зависими променливи от еднородни съвкупности без предходен адитивен факторен анализ. Специално за икономическия анализ обаче препоръчвам и двете форми – адитивната и индексната на дискретния статистически факторен анализ. Най-накрая предлагам да отпадне безкрайният проблем, дали могат, или не могат да се използват множествените индекси при постоянен състав, както и все още нерешеният досега проблем, какво да се прави, ако те не могат да се използват. Вместо тези проблеми **предложих** за индексния факторен анализ на продукцията от еднородни съвкупности на стоките единичните факторни индекси $I_{\bar{p}}$ и I_Q, които могат да се развият в множествени факторни $I_{\bar{p}\,p}, I_{str} = I_{\bar{p}\,\omega}$и I_Q.

4. Критика на формализма в развитието на дискретния статистически факторен анализ и на неговите отрицатели

Както миналото, така и днешното състояние на дискретния статистически факторен анализ е незадоволително и крайно противоречиво. Във връзка с това искам да сравня днешното състояние на индексния анализ със съвременното развитие на общия статистически адитивен и индексен дискретен анализ. Всички анализатори, които се занимават или не се занимават, а трябва да се занимават с него, могат да се подразделят на три групи. В първата попадат преподавателите от образованието (предимно икономисти статистици), които пишат учебници и ръководства по статистика. Една част от тях поместват множествените индекси на Ласпейрес и Пааше, като се задоволяват само да посочат (някои и това не правят), че те били условни поради постоянния си състав. Изборът на индекси зависел от условната икономическа задача, но само дотолкова, доколкото можело да се прецени с кои равнища на единия фактор - базисните или отчетните (постоянния състав), трябвало да се умножават равнищата на другия фактор в числителя и знаменателя на множествения индекс за неговата факторна промяна. Друга част от преподавателите (предимно математици от частните колежи и университети) въобще не се занимават с индексен анализ, но преподават статистика на икономисти без началния и най-необходим на практиката адитивен и индексен факторен анализ! Те вероятно или не го знаят, защото не са го учили, или не си дават труда да го разберат, защото никой не изисква от тях такова нещо. Втората група анализатори обхваща хора от практиката и научните среди, които се занимават с приложни изследвания. Те познават много добре индексния факторен анализ и неговите проблеми, като го прилагат също според условната икономическа задача. Най-често пренасят базисните стойности на даден факторен показател в отчетната година. Третата група специалисти се състои от крайните отрицатели на адитивния и индексния факторен анализ. Те са малобройна група в сравнение с другите две групи, но се срещат и в образованието, и за съжаление - в научните среди. Между втората и третата група има голяма принципна разлика. Анализаторите от втората група, към която принадлежа и аз, приемат решения на двата факторни анализа, които считат за обосновани, но критикуват и отхвърлят другите възможни решения. Между тях има също различия по отношение на обосноваността на решенията. Например някои отричат с основание множествените факторни индекси за цените на Ласпейрес и Пааше, но приемат индексния факторен анализ с други факторни индекси. За разлика от втората група обаче специалистите от третата група отхвърлят направо и двата анализа като лъжливи! Във връзка с това искам да улесня читателя, като го запозная с конкретните основания и модели, които предлагат отрицателите на традиционните адитивен и индексен факторен анализ. Това е много важно, защото всички методи за тези анализи са предназначени най-напред за икономическия факторен анализ и след това за други подобни анализи в останалите области на живота. Или от логическата издържаност и математическата точност на адитивния и индексния факторен анализ зависи и качеството на икономическия анализ, както и на всякакви други анализи. За целта използвам два източника на български език, в които са събрани мненията и основанията на най-известните наши и чужди отрицатели на адитивния и индексния анализ, както и на техните привърженици, които са писали на български и руски език. Единият източник е книгата „Статистическо изследване на структурни изменения" с автор Нина Янкова от Икономическия институт при БАН (Янкова, 2007), а другият източник е докладът „За някои от проблемите при статистическото оценяване на инфлацията" от Стоян Цветков, публикуван в сборника „Съвременно развитие на статистиката и информационните технологии", Национална научна конференция, посветена на Международната година на статистиката 2013 (Цветков, 2015). Посочената в тях литература е само отправна към други важни източници.

Най-напред ще отбележа, че най-старият западен автор, който е цитиран в книгата на Н. Янкова, е Никлъс Пиърсън (Pearson, N., 1896). Той не бива да се бърка с големия английски учен по математическа статистика Карл Пиърсън. Н. Пиърсън е стигнал до извода, че анализът с индексите за цените на Ласпейрес и Пааше трябва да се отхвърли като лъжлива идея. Формално Пиърсън е прав, но тези факторни индекси за цените са съставени за анализ на продукцията на набори от стоки, които не са били разбирани като статистически съвкупности (Цонев, 1997). Прави впечатление, че този анализ не е започнал с промяна на продукцията на отделната стока от промените на нейната цена и натурално количество. Във връзка с това през далечната 1896 г. е нямало още разбиране за еднородни и разнородни статистически съвкупности. Ако е имало такова и индексният факторен анализ беше тръгнал от продукцията на отделната стока, положително е можело да се стигне до индексния анализ на продукцията от еднородните съвкупности на стоките с факторните индекси за средната цена $I_{\bar{p}}$ и за общото натурално количество на стоките I_Q.

Посочените проблеми на индексния анализ вместо да се преодоляват, се формализират още повече през следващия етап от развитието на дискретния факторен анализ. Този етап е започнал от началото на следващия 20-ти век с „идеалната формула" на американския индексолог Ирвинг Фишер, защото с условните множествени факторни индекси при постоянен състав се получават двете индексни решения $I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q_{(p_1)}}$ и $I_0 = I_{p(q_1)} \times I_{q_{(p_0)}}$ (Fisher, 1923). В тях $I_{p(q_0)} \neq I_{\mathrm{p}(q_1)}$ и $I_{q_{(p_0)}} \neq I_{q_{(p_1)}}$. С формулата на Фишер просто се осредняват геометрично двата индекса за цените и двата индекса за физическия обем на продукцията, или $I_p = \sqrt{I_{p(q_0)} \times I_{p(q_1)}}$ и $I_q = \sqrt{I_{q_{(p_1)}} \times I_{q_{(p_0)}}}$. Тези средни геометрични индекси са предложени за окончателно решение на индексния факторен анализ, защото с тях се изпълнява индексното равенство $I_0 = I_P \times I_q$. Ясно и просто, но след широката популяризация на метода, започват критиките срещу него от съмнения до пълно отричане. Техните етапи са накратко изложени в цитираната погоре статия на проф. Цонев и в моята статия за анализа на продукцията на отделната стока (Христов, 2015). Тъй като посоченият период от развитието на индексния анализ е между двете световни войни, се оформят две направления на дискретния статистически факторен анализ. Едното е на „западната индексология“, а другото е на тогавашната съветска статистика, или условно на „източното направление“ на дискретния икономически анализ. В западната индексология определящ е индексният факторен анализ, а следващият, произлизащ от него, е адитивният факторен анализ. В съветската статистика все повече се утвърждава като първичен адитивният факторен анализ, защото тогава за нуждите на централизираното държавно управление и планиране всички показатели в икономическите анализи и планове е трябвало да бъдат както в натурален обем, така и в паричен израз според принципите на планомерното пропорционално развитие. Също поради особеностите на централизираното планиране разходите са били нормативно определяни, както и цените, които са били задържани на постоянни равнища за дълго време. Интересът е бил насочен главно към натуралните количества на разходите и на произвежданата продукция. Изпълнението на икономическите планове се е отчитало ежегодно и по петилетки. Основната задача е била за непрекъснато нарастване на производителността на труда на едно заето лице. При тези условия се е извършвал предимно адитивен факторен анализ на прираста на общата и чистата продукция от увеличенията на производителността на труда и заетите. От индексите наймного се е използвал индексът за физическия обем на продукцията $I_{p(q_0)} = \frac{\sum q_{i1}p_{i0}}{\sum q_{i0}p_{i0}}$, защото цените са били постоянни. Тъй като този индекс е бил за разнородна продукция, той е отразявал и промени в нейната структура. Адитивният факторен анализ обаче, който е придобил голямо приложение, не е завършил с общо решение вероятно поради сталинистките политически и идеологочески условия за анализ. Например намаленията на производителността на труда и на броя на заетите в някои дейности на селското стопанство и на добивната промишленост поради влошени метеорологични условия или изчерпване на природни ресурси са се считали само за временни неблагополучия. Да се отразяват такива факторни промени в общото решение на адитивния анализ е било методологически недопустимо. И все пак общата причина за неразвитостта на индексния анализ в западната индексология и на адитивния анализ в тогавашната съветска статистика е била според мен все още неосъзнатото различие между еднородните и разнородните съвкупности. Имало е само общи догадки за решаващата роля на **икономическата логика.** По този повод един от основателите на съвременната иконометрия Рагнар Фриш е заявил през 1936 г., че проблемът за построяването на индексните числа се отнася по-скоро към **икономическата теория** отколкото към статистическата техника (Allen, 1975).

На този фон ще представя конкретните основания и логика на отрицателите на адитивния и индексния факторен анализ, или за по-кратко - отрицателите на дискретния факторен анализ (Раяцкаси Плакунов, 1987; Шкодрев, 2003; Янкова, 2007). Според тях показателите за интензивността на икономическите процеси за една наблюдавана година или за краткост „интензивните показатели“ като производителност на труда $\overline{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{P}}{L}$, фондоотдаване $f = \frac{P}{A}$, средна цена $\overline{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{P}}{Q}$ и други, **не можели да бъдат измерени независимо** (подчертано от мен) от определящите ги величини - обемът на продукцията P, броят на заетите L, обемът на производствените постоянни активи A, общото натурално количество на стоките Q и други! (Янкова, с. 125) Всеки икономист обаче ще запита, как тогава да се определя производителността на труда на едно заето лице **независимо** от обема на продукцията? Обяснение или отговор на отрицателите по този въпрос няма, но икономистът има точно определение. За него производителността на труда е средният обем продукция на едно заето лице или е **средна величина.**

Следващото твърдение на отрицателите на дискретния статистически анализ е срещу мултипликативните двуфакторни модели за зависимостта на обемни резултативни величини, например обемът на продукцията в паричен израз **от произведението на две факторни величини - производителността на труда** $\overline{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{P}}{L}$ (интензивен фактор) и **броят на заетите** L (екстензивен фактор). Според отрицателите на дискретния статистически анализ мултипликативният двуфакторен модел $\mathrm{P} = \overline{\mathrm{p}}L = \frac{P}{L} \times L$ бил **тавтология или лъжлива зависимост,** защото се съкращавал броят на заетите L и се получавала тавтологията P=P! (Янкова, с. 124) Най-напред ще отбележим, че това равенство в математиката не е тавтология а е **тъждество** P≡P! (Выгодский, 1964) То показва само, че моделът или зависимостта $\mathrm{P} = \bar{\mathrm{p}}L$ е **логически вярна!** Ако моделът не беше верен, нямаше да се получи равенството. То може да се докаже алгебрически, ако моделът се разгледа като уравнение с две известни величини и една неизвестна. За обема на продукцията P има два случая. Първият е с двете известни величини P и L, с които се определя неизвестната производителност на труда $\bar{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{P}}{L}$. Този случай показва погрешната логика на отрицателите на дискретния анализ, че производителността на труда $\bar{\mathrm{p}}$ като показател за интензивността на икономически процес не можела да бъде измерена независимо от определящите я величини - обемът на продукцията P и броят на заетите L. Това очевидно не е вярно, защото след като е определена производителността на труда $\bar{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{P}}{L}$, тя участва в модела с известните величини P и L, откъдето $\mathrm{P} = \frac{P}{L} \times L$. Със съкращението на L и тъждеството P≡P се доказва, че моделът $\mathrm{P}=\bar{\mathrm{p}} \times L$ е **верен** и производителността на труда трябва да се измерва именно с отношението между определящите я величини $\frac{P}{L}$. Вторият случай на уравнението е с неизвестен обем на продукцията X и с двете известни величини - производителността на труда $\bar{\mathrm{p}}$ и броят на заетите L. Решението на уравнението е с произведението на двете известни $\bar{\mathrm{p}}L$=P, откъдето $\frac{\mathrm{X}}{L} \times L$=P. Или X=P, с което се потвърждава определението на икономиста, че производителността на труда е **средният обем продукция на едно заето лице.**

Ако допуснем обаче, че отрицателите са прави, нека икономистите ги попитат с какъв модел тогава може да се направи анализ на **промяната** в обема на продукцията от промените на производителността на труда и на заетите, защото аз не можах да намеря такъв в тяхната литература. По-нататък, след като двуфакторният модел е обявен за лъжлива зависимост, известното решение на анализа на прираста на продукцията от едновременното увеличение на двата фактора $\Delta P = \Delta P_{\bar{p}} + \Delta P_L + \Delta\bar{p}\Delta L$ било **също тавтология** (Янкова, с. 126). На мен ми е неудобно да коментирам, че след като единственото решение на адитивния факторен анализ, което се приема безусловно за вярно от всички анализатори във всички области на живота, било също тавтология! Една друга тавтология било разширението на уравнението $\mathrm{S} = \frac{\mathrm{x}}{y}$ с допълнителни фактори $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}, \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{в}}, \frac{\mathrm{в}}{\mathrm{c}}, \frac{c}{d}$ и $\frac{d}{y}$. След тяхното мултипликативно включване в уравнението и съкращението им, се получавало пак същото отношение $\frac{\mathrm{x}}{y}$, или тавтологията $\frac{\mathrm{X}}{y} = \frac{\mathrm{x}}{y}$. Естествено е, че като се вземат такива допълнителни фактори, които се съкращават, остава същото отношение $\frac{\mathrm{x}}{y}$. От статистическия опит на развитите страни обаче може да се покаже, че в модела за продукцията със средната производителност на труда на заетите лица могат да се включат още два допълнителни фактора. С тях се подобрява моделът, защото те показват **различна използваемост** на работната сила и подобряват **точността** на производителността на труда. В тези страни се използва много по-развит мултипликативен модел с четири фактора - много по-точната производителност на труда на един човекочас, брой на човекочасовете на един човекоден, брой на човекодните на един зает и брой на заетите. Този модел е особено полезен за анализ на сезонни производства, младежка безработица и на кризи, когато се правят усилия за намаление на безработицата чрез намаление на работния ден на един зает или на седмичното работно време в часове на един зает, с цел да се наемат на работа и безработни в някои дейности. Бизнесът използва също тези модели за оценяване на своята ефективност и конкурентоспособност чрез измененията на **средната производителност на един работен час.** На същата основа тези модели помагат и при определянето на минималните заплащания на един работен час за различните видове труд, към които преминават сега развитите страни.

Колко са далече отрицателите на дискретния факторен анализ от икономиката и живота, може да се види и с още един мултипликативен модел за анализ на продукцията на бизнес туризма. Всеизвестно е, че **основните фактори** за общия обем на приходите от туризма за един туристически сезон или година са три - брой на туристите, среден брой нощувки на един турист и среден приход от една нощувка. На практика анализаторът може да не знае да прилага адитивен и индексен факторен анализ на приходите, да не говорим за техните еднозначни решения. Със своя здрав практически усет и професионален опит обаче неговият подход ще бъде старият изпитан, известен още от социалистическата планова икономика. Той просто ще сравни трите факторни показателя с техните стойности от някаква друга (базисна) благоприятна за туризма година. Така ще види кой показател (показатели) има благоприятно влияние върху приходите и от кой - неблагоприятно влияние. След това ще потърси конкретните причини за техните влияния. По същия начин ще анализира и общия разход за туристическия сезон или година от същите фактори. От сравнението на двата анализа ще направи оценка на текущата производствена ефективност на своята дейност. Нека сега допуснем, че на по-високо равнище анализаторът ще се обърне към образованието или към икономическата наука с молба за точен метод на анализ на приходите и разходите. Ако за негово нещастие обаче попадне на отрицатели на дискретния факторен анализ, интересна ще бъде неговата реакция, когато научи, че двата модела за приходите и разходите били тавтологии или лъжливи зависимости.

В заключение, след като се отричат адитивният и индексният факторен анализ на продукцията, би следвало да се предложи някакъв друг, „нетавтологичен“ модел или метод за този анализ. **Такива обаче няма** и отрицателите на дискретния факторен анализ поставят статистиката в много трудно положение. Ако се възприемат техните разбирания, всички икономисти ще възприемат статистиката като безсилна за анализ и ще я определят само като необходима дейност за събиране и отчитане на информацията. При тези условия те или ще продължат да използват старите условни статистически методи или ще се опитат да създадат нови, за да не спират своята аналитична дейност. Накрая ще завърша обаче с успокоение за икономистите, че за адитивния и индексен факторен анализ **няма никакво значение** пословутата „тавтология“. Това е така, защото няма никакво значение как се получава зависимата променлива (обемът на продукцията) от двуфакторния модел - тавтологично със съкращение на заетите L или с произведението на средната производителност на труда $\bar{\mathrm{p}}$ и броят на заетите L. Единственото условие на двата анализа е да са **известни** стойностите и на трите дискретни променливи (зависимата и двете факторни) за базисната и отчетната година. С адитивния факторен анализ се обяснява не обемът на продукцията за една година, а **промяната или разликата** на нейните обеми от двете сравнявани години $\Delta \mathrm{P} = \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0$ с разликата на двете средни производителности на труда $\Delta\bar{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0$ и разликата в броя на заетите $\Delta L = L_1 - L_0$. С индексния факторен анализ също се обяснява не обемът на продукцията за една година, а **относителната промяна на нейния обем** (резултативният индекс $\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_0}$) с относителната промяна на средната производителност на труда (факторният индекс $\frac{\bar{\mathrm{p}}_1}{\bar{\mathrm{p}}_0}$) и относителната промяна на броя на заетите (факторният декс $\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_0}$). Или за двата анализа няма никакво значение как са получени обемите на продукцията P_0 и P_1, но ако се приемат тъждествата $\mathrm{P}_0 \equiv \mathrm{P}_0$ и $\mathrm{P}_1 \equiv \mathrm{P}_1$ за тавтологии, не може да се извърши никакъв факторен анализ нито на разликата $\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0$, нито на индекса $\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_0}$.

Изложеният дотук коментар има за цел да покаже сбърканата или по-скоро липсваща логика на отрицателите на дискретния икономически анализ. Със следващ мултипликативен двуфакторен модел, който няма нищо общо нито с икономиката, нито със статистиката, сбърканата логика се проявява и като **антиматематическа** в дискретния математически анализ. Мултипликативният модел е от механиката на движението и изразява универсалната и елементарна зависимост на изминато разстояние S от средната скорост $\bar{v} = \frac{S}{t}$ и времето на движението t. Или $S = \bar{v}$xt= $\frac{S}{t}$x t. За отрицателите на дискретния анализ тази зависимост е също тавтология, защото ако **предварително** се съкрати в нея времето t, се получава тъждеството S≡S. С него не може да се направи анализ нито на разликата на две разстояния с различни дължини $S_2 - S_1$, нито на тяхното относително различие $\frac{S_2}{S_1}$ с техните различни средни скорости $\bar{v}_1 \neq \bar{v}_2$ и различно време на движение $t_1 \neq t_2$.

По-нататък вместо модели за адитивен факторен анализ на продукцията е изложен един друг модел **само** за разликата между две средни производителности на труда на заетите лица в страната $\bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0$ (Янкова, гл. 6). Според възприетите определения на средната производителност на труда на едно заето лице за цялата икономика от всички държавни статистически органи и международни статистически институции тя може да бъде непретеглена и претеглена средна. Като непретеглена $\bar{\mathrm{p}} = \frac{P}{L}$, където P е обемът на брутния вътрешен продукт за една година, L е средногодишният брой на всички за- ети в икономиката. Като претеглена средна от отраслови производителности на труда, $\bar{\mathrm{p}} = \frac{\sum p_i L_i}{\sum L_i} = \sum p_i\, \omega_i$, където p_i са отрасловите производителности на труда $\frac{P_i}{L_i}$, а L_i е броят на заетите в отделните отрасли, сумата на които е $\sum L_i = L$ за страната; $\omega_i = \frac{L_i}{\sum L_i}$ са относителните дялове на теглата - броят на заетите по отрасли, като условието за тях е $\sum \omega_i = 1$. Оттук традиционният адитивен анализ на разликата на двете претеглени средни от отчетна и базисна година е $\bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0 = \frac{\sum p_{i1} L_{i1}}{\sum L_i} - \frac{\sum p_{i0} L_{i0}}{\sum L_{i0}} = \sum p_{i1}\, \omega_{i1} - \sum p_{i0}\, \omega_{i0}$. Следователно разликата $\bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0$ може да бъде анализирана **само** с промените на двата фактора - отрасловите производителности на труда p_i и на относителните дялове на теглата ω_i на заетите по отрасли.

Вместо посоченият анализ, е изложен друг адитивен анализ с четири фактора (Янкова, с. 141). От тях само единият е традиционният - броят на заетите по отрасли. Другият традиционен фактор - отрасловите производителности на труда, е з**аменен** с **три** фактора - общият брой заети, отрасловата структура на продукцията и общият обем на продукцията. Тези показатели показват един икономически сбъркан модел с представянето на резултативния обем на продукцията като фактор, а факторът „производителност на труда“ - като зависима променлива. Самият модел за средната производителност на труда обаче **не е представен** аналитично, за да се види ясно как се представя производителността на труда като **зависима променлива** от посочените четири фактора. Внимателният читател обаче ще забележи, че ако всяка средна производителност на труда на едно заето лице $\bar{\mathrm{p}} = \frac{P}{L}$ се умножи по общия брой на всички заети L, адитивният анализ на разликата между двете средни производителности на труда $\bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0$ се превръща в липсващия адитивен факторен анализ на продукцията $\bar{p}_1 L_1 - \bar{p}_0 L_0 = \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0$. След като е обявен обаче за „тавтология“, направено е само решение на адитивния анализ на разликата на двете средни производителности $\bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0$, но същото решение представлява алгебрична сума **само на два,** а не на четири сумарни ефекта от четирите фактора. Причината е, че вторият сумарен ефект от промяната на отрасловата структура на заетите и третият сумарен ефект от промяната на отрасловата структура на продукцията били за страната **винаги нули!** (Янкова, с. 142). Не мога да скрия, че за първи път срещам подобно нещо. Според теорията на дискретната математика и статистика **сумарният ефект** на структурните промени на какъвто и да е фактор **трябва да участва** в разликата на двете средни стойности на дискретната зависима променлива, в случая разликата $\bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0$. Във връзка с това всеки ще запита, защо се въвеждат в анализа структурните промени на заетите и на продукцията по отрасли **от две сравнявани години,** след като той не може да измери техните сумарни ефекти за цялата икономика? Аз се въздържам от коментар, като предоставям на читателя да реши на кого е сбъркана логиката. В моя статия в сп. „Статистика“ в кн. 3 от 2008 г. отхвърлих същата тавтологична логика, а в следваща статия в кн. 4 на списанието показах сбъркаността на този модел (Христов, 2008а, 2008б). Там посочих принципната разлика между структурните промени $\Delta\omega_i = \omega_{i1} - \omega_{i0}$ и **структурния ефект** от тях. Според функцията на математическия сигнум този ефект се определя с израза $\Delta\omega_i \times p_{imin} = (\omega_{i1} - \omega_{i0}) p_{imin}$ и показва **промяната** на средната базисна производителност на труда $\bar{p}_0$ **само** от разликата $\Delta\omega_i = \omega_{i1} - \omega_{i0}$ на относителните дялове на заетите в i-я отрасъл. Другият множител p_{imin} според математическия сигнум е по-малкото равнище на производителността на труда на i-я отрасъл от базисната или отчетната година. Защо не трябва да се взима по-голямото равнище на p_i съм показал теоретично и нагледно в моите предходни публикации и в точка 1 на настоящата статия. Тук само ще отбележа, че не трябва да се използват по-големите равнища на p_i, защото ефектите с тях ще съдържат освен реални, още и **фиктивни** (реално несъществуващи) ефекти от адитивния факторен анализ. Тъй като те са с противоположни знаци в ефектите от промените на двата фактора, фиктивните ефекти взаимно се неутрализират, **но всички ефекти с тях са неверни.** Именно на тази логическа и математическа основа защитих научните степени „доктор“ и „доктор на икономическите науки“. Следователно структурният ефект $\Delta\omega_i \times p_{imin}$ е верен и точен и представлява **приносът** на всеки i-ти отрасъл в общия (сумарен) структурен ефект за цялата икономика. По този начин той е **структурният принос** на i-тия отрасъл в разликата между двете средни производителности на труда $\overline{\mathrm{p}}_1 - \overline{\mathrm{p}}_0$ и не може да се подменя с каквито и да са структурни промени. Едно нещо са структурните промени (разликите $\Delta\omega_i$), а съвсем друго са ефектите, в които те участват. Всеки ефект зависи **не само** от величината на разликата $\Delta\omega_i$, но и от величината на отрасловата производителност на труда p_{imin}. Следователно сумата на разликите $\Delta\omega_i$ за цялата икономика $\sum \Delta\omega_i = \sum(\omega_{i1} - \omega_{i0})$ е **винаги** равна на 0, но сумата на структурните ефекти $\sum \Delta\omega_i \times p_{imin}$ **никога** не може в общия случай да бъде 0!

След отпечатването на книгата „Статистическо изследване на структурни изменения“, излезе една рецензия в сп. „Икономическа мисъл“, в която се защитават идеите на авторката (Ив. Стойков, 2008). По-конкретно, не било логично да се търсел ефект от промени в отрасловата структура на заетите в прираста на продукцията, когато се разглеждал отчетен период? С това твърдение се отричат показаните по-горе структурни ефекти $\sum \Delta\omega_i \times p_{imin}$, но то е **невярно,** защото за структурните **промени** на заетите, както и за **прираста** на продукцията участват като разлики данните от отчетния и базисния период. Друго любопитно твърдение е, че авторката се отнасяла критично към формули от типа $S = \frac{x}{a} \mathrm{x} \frac{a}{\text{в}} \mathrm{x} \frac{\text{в}}{c} \mathrm{x} \frac{c}{d} \mathrm{x} \frac{d}{y}$. Според мен вероятно се има предвид, че ако се съкратят факторните променливи а, в, с и d, се получава същото $S = \frac{x}{y}$. След като е така обаче, трябва веднага да се умножи отношението $\frac{x}{y}$ като интензивен показател с екстензивен, в случая с у, за да се получи $\mathrm{S} = X$, откъдето се съставя двуфакторният мултипликативен модел $S = \frac{S}{y} \times y$. За разлика от това решение, отрицателите на дискретния статистически анализ **веднага** ще съкратят y в този модел, без да съобразят, че **отхвърлят** всякакъв анализ на промяната в обема на продукцията от промените на интензивни и екстензивни фактори. Тук ще изразя голямото си учудване от „необяснимата смелост“ на онези отрицатели на дискретния факторен анализ (вероятно, защото не си дават сметка), които са с математическо образование. С тяхната „логика“ трябва да се отрече и теорията на вероятностите и нейните многобройни приложения във всички области на живота и знанието. С тази теория и приложения се измерва и анализира появата на събития или проявите на дадени явления (зависими променливи) с **вероятностите** (интензивните фактори) за появата на събитията и с величините на **средите** (екстензивните фактори) от които произлизат вероятностите и събитията. По тази причина, както и поради факта, че посочената книга „Статистическо изследване на структурни изменения“ е излязла от името на Икономическия институт на БАН без рецензенти(!) и се разпространява също от името на БАН, редно е институтът да даде професионално становище по изложените проблеми. Тъй като те са много важни и за образованието по икономически анализ, предлагам и катедрите по статистика в икономическите университети да вземат отношение.

Заключение

Предложена е нова методика за индексен факторен анализ на продукцията в паричен израз P на еднородни съвкупности на стоки от един и същ вид, която е в зависимост от средната цена $\bar{p}$ на стоките (интензивен фактор) и от тяхното общо натурално количество Q в определена натурална мярка (екстензивен фактор). Анализът се извършва с двуфакторния мултипликативен индексен модел $I_0 = I_{\bar{\mathrm{p}}} \times I_Q$, където $I_0 = \frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_0}$ е множественият индекс за продукцията през отчетната и базисната година, $I_{\bar{\mathrm{p}}} = \frac{\bar{\mathrm{P}}_1}{\mathrm{P}_0}$ - единичният факторен индекс за средната цена, и $I_Q = \frac{Q_1}{Q_0}$ - единичният факторен индекс за общото натурално количество на стоките. Решението с този модел може в общия случай да бъде **невярно,** защото факторните индекси $I_{\bar{\mathrm{p}}}$ и I_Q могат да съдържат фиктивни (реално несъществуващи) ефекти. По тази причина решението на индексния факторен анализ се основава на решението с методиката за адитивен факторен анализ на продукцията от същите еднородни съвкупности на стоките. Тя е публикувана в предходната статия на автора в списанието (Христов, 2016). От адитивния факторен анализ се определят с помощта на дискретната нечетна (знакова) функция на математическия сигнум само **реално** съществуващите ефекти в паричен израз - увеличения и/или намаления на продукцията (зависимата променлива) от факторните промени на средната цена $\bar{p}$ и общото натурално количество на стоките Q. Същите реално съществуващи ефекти се получават с отчитане на едновременните съвместни еднопосочни и разнопосочни промени на двата фактори. От еднопосочните факторни промени се получават два нетни ефекта и един съвместен ефект от еднопосочните съвместни влияния на двата фактора. За разлика от тях от разнопосочните факторни промени има само два нетни ефекта с различни алгебрични знаци без съвместен ефект. С получените реални относителни ефекти спрямо базисния обем на продукцията P_0 се **преминава** от адитивния в индексния факторен анализ. За целта факторните индекси се **заменят** с равни на тях **аналитични** индекси. Тези индекси се съставят с реалните относителни ефекти от адитивния факторен анализ и евентуалните фиктивни ефекти. Вярното и точно еднозначно решение на индексния факторен анализ се получава с произведението на аналитичните индекси, от което **отпадат** фиктивните ефекти и остават само реалните относителни ефекти от адитивния факторен анализ. Оттук изводът за новата методика на индексния факторен анализ е, че неговото решение трябва да е с ефектите от **предходен** адитивен факторен анализ, които се определят с дискретната нечетна функция на математическия сигнум. С новия метод за индексен факторен анализ се отхвърлят всички стари и традиционни методи, защото решенията с тях съдържат фиктивни ефекти. Най-старите методи с множествените индекси при постоянен състав за цените на Ласпейрес и Пааше не са верни в общия случай на индексния анализ, но е показано в кои частни случаи те могат да бъдат използвани. В следващата статия ще бъде представена нова методика за индексен факторен анализ на продукцията от разнородни съвкупности на стоките.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА:

Выгодский, М. (1964). Справочник по елементарной математике, Москва, „Наука“

Гатев, К. (1995). Въведение в статистиката, Лиа, С.

Раяцкас, Р., М. Плакунов (1987). Количественный анализ в экономике, Москва, „Наука“

Русев, Б., З. Сугарев (2008). Демографска статистика, Университетско издателство „Стопанство“, С.

Сугарев, З. (1975). Демографска статистика, Наука и изкуство, С.

Стойков, Ив. (2008). Статистическо изучаване на структурни изменения в икономически и социални процеси, Икономическа мисъл, кн. 4, С.

Христов, Е. (2008а). Едно достатъчно условие за еднозначни решения на факторни промени на стойностни (абсолютни) величини, Статистика, кн. 3.

Христов, Е. (2008б). Едно достатъчно условие за еднозначни решения на факторни промени на средни равнища, Статистика, кн. 4, С.

Христов, Е. (2015). Елементарният функционален адитивен и индексен факторен анализ и неговите еднозначни решения с дискретната нечетна функция на математическия сигнум, Статистика, кн. 1 , www.nsi.bg.

Христов, Е. (2016). Адитивен факторен анализ на обема на продукцията на еднородни и разнородни съвкупности на стоки с дискретната нечетна функция на математическия сигнум, Статистика, кн. 1, www.nsi.bg.

Цветков, С. (2015). За някои от проблемите при статистическото изучаване на инфлацията, доклад в сб. Съвременно развитие на статистиката и информационните технологии, Национална научна конференция, посветена на Международната година на статистиката, 3 октомври 2013 г., Издателски комплекс - УНСС, С.

Цонев, В. (1997). Теория на индексите и нейната статистическа алтернатива, Статистика, кн. 6, С.

Шкодрев, Е. (1989). Логическата противоречивост на индексния метод и неговите познавателни възможности, Икономика, №7, С.

Янкова, Н. (2007). Статистическо изследване на структурните изменения, Академично издателство „Проф. Марин Дринов“, С.

Allen. R. (1975). Index Numbers in Theory and Practice. London: Macmillan.

Fisher, I. (1923). The Making of Index Numbers. London: Pitman and Sons.

Pierson, N. (1896). Future consideration on Index Numbers, Economic Journal, V-VI. London.

System of National Accounts 2008. Commission of the European Communities,International Monetary Fund, Organization of Economic Cooperation and Development,United Nation, World Bank.

The Oxford Paperback Dictionary 1994.