ИНДЕКСЕН ФАКТОРЕН АНАЛИЗ НА ПРОДУКЦИЯТА ОТ ЕДНОРОДНИ И РАЗНОРОДНИ СЪВКУПНОСТИ НА СТОКИ СПОРЕД ПРОМЕНИТЕ НА ТЕХНИТЕ ЦЕНИ И НАТУРАЛНИ КОЛИЧЕСТВА С ДИСКРЕТНАТА НЕЧЕТНА ФУНКЦИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ СИГНУМ (МЕТОДИКА ЗА АНАЛИЗА)

Емил Христов[*]

Въведение

С тази статия завършва дискретният статистически факторен анализ с неговите две форми - адитивната и индексната, за изменението на обема на продукцията (зависимата променлива) от промените на двете факторни променливи - цените на отделните стоки (интензивен фактор) и на техните натурални количества (екстензивен фактор). Предложен е **нов** индексен факторен анализ на продукцията от еднородни и разнородни съвкупности с промените на цените и натуралните количества на отделните стоки и услуги. Според икономическата статистика всяка произведена, продадена или потребена продукция се характеризира с три признака на отделните стоки и услуги. Първият е **видът** на всяка стока според нейното предназначение за задоволяването на точно определена потребност или подобни потребности. Вторият признак е **цената** на отделната стока за величината на нейната стойност в паричен израз. Третият признак е **натуралното (физическо) количество** на стоката в определена натурална мярка (брой, тонове, килограми, литри, кв. м, куб. м и други). Трите признака на всяка стока могат да се наблюдават и отчитат статистически за последователни периоди (година, тримесечие, месец, седмица, работен ден и час). Всички статистически съвкупности на стоките и услугите с тези признаци се определят **преди** всеки анализ като **еднородни или разно-**

[*] Професор, д.ик.н.; e-mail: emil_hristov_37@hotmail.com.

родни (Христов, 2016a). Всяка еднородна съвкупност се състои от един и същ вид стоки или подобни взаимозаменяеми стоки, които задоволяват точно определена конкретна потребност и имат освен индивидуални цени p_i и натурални количества q_i още и средна цена $\overline{\mathrm{p}}$, както и общо натурално количество Q в една и съща натурална мярка (Христов, 2016a). Възможно е обаче общото натурално количество Q да бъде за крайни резултати от производството, като електроенергия в кВтч от различни енергийни източници (въглища, газ и др.) или калории на определен вид храни от различна земеделска продукция, мощности в конски сили на определен вид техника от различни материали и други. Според дефиницията разнородната съвкупност е **крайно множество** на точно определени **различни** (разнородни) стоки, **обединени** за задоволяването на някаква обща потребност (множество на различни конкретни потребности), които се характеризират с различни цени p_i и натурални количества q_i в различни натурални мерки (Христов, 2016a). Или за разлика от еднородната съвкупност стоките на една разнородна съвкупност задоволяват **различни** конкретни потребности и не могат да имат нито обща средна цена $\overline{\mathrm{p}}$, нито общо натурално количество Q, защото техните отделни натурални количества q_i са в различни натурални мерки. Типични примери за разнородни съвкупности на стоките са различните суровини и материали на входа на всяко производство. Те могат да бъдат както за производство на стоки за ежедневна или еднократна употреба, така и за стоки с дълготрайна употреба. В заключение, с предложените определения на еднородни и разнородни съвкупности искам само да покажа колко необходима, отговорна и трудна е тази задача на икономическата статистика преди всеки статистически факторен анализ. Еднородните съвкупности имат по-големи възможности за анализ, но ако не могат да бъдат обосновани, анализът ще бъде по-ограничен и само за разнородни съвкупности.

Новото, което се предлага в настоящата статия, е **обща методика** за индексен факторен анализ на продукцията от еднородни и разнородни съвкупности на стоките. Тя е **изведена** от методиката за адитивния факторен анализ на общата продукция от разнородните съвкупности в моята предходна статия в списанието с промените на цените p_i и натуралните количества q_i на **отделните стоки** (Христов, 2016a). Освен тази методика в същия източник е представена и друга методика за адитивен факторен анализ на продукцията от еднородни съвкупности на стоките чрез промените на техните средни цени $\overline{\mathrm{p}}$ и общи натурални количества Q (Христов, 2016a). За улеснение на читателя препоръчвам той да се запознае предварително и с двете методики за адитивен факторен анализ на продукцията от еднородните и разнородните съвкупности. Връзката между двете методики за адитивен факторен анализ се осъществява в настоящата статия чрез представянето на **всяка разнородна съвкупност** като **крайно множество** на отделни различни стоки и отделни групи еднородни стоки. От своя страна, всяка отделна група еднородни стоки се третира като **отделна еднородна съвкупност на стоки.** По този начин **всяка разнородна съвкупност на стоки** може да се представи като крайно множество на отделни стоки, някои от които са различни от всички останали, а други са от един и същ вид с други стоки, но също са различни от всички останали стоки. Следователно такава разнородна съвкупност може да включва както еднородна (еднородни) съвкупност, така и по-малка разнородна съвкупност на отделни различни стоки. На тази основа се извършва най-напред адитивен факторен анализ на продукцията на всяка i-та отделна стока независимо дали тя е различна от всички останали стоки, или е от еднородна съвкупност на стоки в разнородната съвкупност. Този адитивен факторен анализ може да се извършва и на продукцията от еднородни съвкупности на стоки, когато те се разглеждат като **крайни множества на отделни стоки от един и същ вид.** С такова представяне на еднородните съвкупности няма вече никакво значение от какви съвкупности (еднородни или разнородни) е продукцията, след като адитивният и индексният факторен анализ се извършват най-напред за продукциите на **отделните стоки.**

Дискретният статистически факторен анализ започва като адитивен факторен анализ, защото според методиките на автора за двата анализа само от адитивния анализ се получават в явен вид **верните и точни ефекти** (увеличения и/или намаления) на продукцията от промените на двата фактора - увеличенията и/или намаленията на цените и на натуралните количества на стоките. Ефектите от отделните факторни промени се определят с известната нечетна функция на математическия сигнум (Христов, 2016а). С нея се отчита **взаимозависимостта** между промените на двата фактора, според която ефектът от промяната на всеки фактор се съобразява с едновременната промяна на другия фактор. Получените ефекти от факторните промени са сумарни **независими** величини. След това според **концепцията** за независимите източници на прираст или намаления на продукцията се сумират нетните ефекти от промените на всеки фактор, както и съвместните ефекти от еднопосочните промени на двата фактора (Христов, 2016а). Получените сумарни ефекти за цялата разнородна съвкупност са алгебрични суми от **преобладаващото влияние** на всеки фактор за увеличение или намаление на продукцията. От този адитивен факторен анализ произлиза предлаганият **нов** индексен факторен анализ на продукцията на цялата разнородна съвкупност на стоките. Преходът от адитивния в индексния анализ се осъществява чрез относителните сумарни ефекти спрямо базисния обем на продукцията на разнородната съвкупност. Факторните индекси, които след това се съставят, са със сумарните относителни ефекти за цялата разнородна съвкупност на стоките. Следващото представяне на новия индексен факторен анализ е според изложената разгръщаща се логика на автора за дискретния статистически факторен анализ на продукцията от еднородните и разнородните съвкупности на стоките.

С общата методика за индексен анализ на продукцията от еднородните и разнородните съвкупности на стоките се намират **верните и точни еднозначни решения** на традиционния индексен факторен анализ на изменението на продукцията от факторните промени на цените p_i и на натуралните количества на стоките q_i в сравнение с **условните и неверни решения** с множествените факторни индекси за цените при постоянен състав на Ласпейрес и Пааше, $I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q(p_1)}$ и $I_0 = I_{p(q_1)} \times I_{q(p_0)}$ (Гатев, 1995).

С цел да се покаже извеждането на общата методика за индексния анализ с данните за p_i и q_i на отделните стоки в следващата първа точка на статията е представен накратко началният адитивен факторен анализ на продукцията на стоките, с които се образуват еднородните и разнородните съвкупности.

1. Адитивен факторен анализ на обема на продукцията на отделните стоки с данни за техните цени и натурални количества

С представянето на всяка разнородна съвкупност на стоките като крайно множество (точен брой) на отделни различни стоки и групи стоки се открива възможността да се извърши най-напред адитивен факторен анализ на продукцията на всяка отделна стока. Най-подробните и точни данни са само за една отделна i-та стока (i =1, 2, ..., n) (Христов, 2016а). Адитивният факторен анализ на изменението на продукцията на **отделната i-та стока** се извършва с **началния** двуфакторен мултипликативен модел $P_i = p_i \times q_i$. В него P_i е обемът на продукцията на i-та стока в паричен израз, p_i е средната цена на стоката за една календарна година, q_i е натуралното количество на същата i-та стока в съответната натурална мярка за същата календарна година. За целите на адитивния факторен анализ мултипликативният модел $P_i = p_i \times q_i$ се превръща със знаковата функция на математическия сигнум в следващия **адитивен (линеен) факторен модел:** $\Delta P_i = \Delta P_{pi} + \Delta P_{qi} + \Delta P_{pqi} = \Delta p_i \times q_{imin} + \Delta q_i \times p_{imin} + h_i \Delta p_i \Delta q_i$ (Христов, 2015, 2016а). В този адитивен модел $\Delta P_i = P_{i1} - P_{i0}$ е изменението (увеличението или намалението) на продукцията през отчетната спрямо базисната година, $\Delta p_i = p_{i1} -$

p_{i0} е факторната промяна (увеличението или намалението) на цената p_i на стоката, а $\Delta q_i = q_{i1} - q_{i0}$ е факторната промяна (увеличението или намалението) на натуралното количество на стоката q_i за двете сравнявани години.

Ефектите от посочените факторни промени са увеличения или намаления на дискретната зависима променлива (продукцията) и се определят със знаковата функция на математическия сигнум:

$\Delta P_{pi} = \Delta p_i \times q_{imin}$ е **нетното** увеличение или намаление на обема на продукцията **само** от факторната промяна на цената на стоката Δp_i,

$\Delta P_{qi} = \Delta q_i \times p_{imin}$ е **нетното** увеличение или намаление на обема на продукцията **само** от факторната промяна на натуралното количество на стоката Δq_i,

$\Delta P_{pqi} = h_i \Delta p_i \Delta q_i$ е евентуалният **съвместен ефект** от еднопосочни съвместни промени на двата фактора (едновременни увеличения или намаления на p_i и q_i), където h_i е параметър на знаковата функция на математическия сигнум. Той взема една от трите дискретни стойности: –1, 0 или +1 (Христов, 2015, 2016а).

Всеки нетен ефект ΔP_{pi} или ΔP_{qi} се определя с промяната на съответната факторна променлива Δp_i или $\Delta q_{i,}$ умножена с **по-малкото равнище** на другата факторна променлива q_{imin} или p_{imin} от базисната или от отчетната година.

Съвместният ефект $\Delta P_{pqi} = h_i \Delta p_i \Delta q_i$ възниква **само** при съвместни еднопосочни промени (едновременни увеличения или намаления на p_i и q_i). При $\Delta p_i > 0$ и $\Delta q_i > 0$, $h_i = +1$ и е за положителен съвместен ефект $h_i \Delta p_i \Delta q_i = \Delta p_i \Delta q_i > 0$. Той показва прираст на продукцията от едновременните съвместни увеличения на цената p_i и натуралното количество на стоката q_i. При $\Delta p_i < 0$ и $\Delta q_i < 0$, $h_i = -1$ и е за отрицателен съвместен ефект $h_i \Delta p_i \Delta q_i = -1(-\Delta p_i)(-\Delta q_i) = \Delta p_i \Delta q_i < 0$. Той показва намаление на продукцията от едновременните съвместни намаления на цената p_i и натуралното количество q_i. При разнопосочните факторни промени $\Delta p_i > 0$ и $\Delta q_i < 0$, $h_i = 0$ **няма съвместен ефект,** защото $0 \times \Delta p_i(-\Delta q_i) = 0$. В обратния случай на разнопосочните факторни промени $\Delta p_i < 0$ и $\Delta q_i > 0$, $h_i = 0$ и също **няма съвместен ефект,** защото $0(-\Delta p_i)\Delta q_i = 0$. Или обобщено, от всички възможни факторни промени с техните алгебрични знаци (simultaneous changes) могат да се получат всичко четири еднозначни, верни и точни решения от адитивния факторен анализ на продукцията на всяка i-та **различна** стока (i-та еднородна подсъвкупност) на разнородната съвкупност:

при $\Delta p_i > 0$ и $\Delta q_i > 0$, $h_i = +1$ и $\Delta P_i = \Delta p_i q_{i0} + \Delta q_i p_{i0} + \Delta p_i \Delta q_i = \Delta P_{pi} + \Delta P_{qi} + \Delta P_{pqi}$, при $\Delta p_i < 0$ и $\Delta q_i < 0$, $h_i = -1$ и $\Delta P_i = -\Delta \mathrm{p}_i q_{i1} - \Delta q_i \mathrm{p}_{i1} - \Delta p_i \Delta q_i = -\Delta P_{pi} - \Delta P_{qi} - \Delta P_{pqi}$,

при $\Delta p_i > 0$ и $\Delta q_i < 0$, $h_i = 0$ и ΔP_i=$\Delta \mathrm{p}_i q_{i1} - \Delta q_i \mathrm{p}_{i0} = \Delta P_{pi} - \Delta P_{qi}$,

при $\Delta p_i < 0$ и $\Delta q_i > 0$, $h_i = 0$ и ΔP_i=$-\Delta \mathrm{p}_i q_{i0} + \Delta q_i \mathrm{p}_{i1} = -\Delta P_{pi} + \Delta P_{qi}$.

Изводът от тези решения е, че **само** от еднопосочните факторни промени (едновременни увеличения или намаления на p_i и q_i) има положителен или отрицателен съвместен ефект. От разнопосочните факторни ефекти на p_i и q_i **няма** съвместни ефекти и решението съдържа само двата нетни ефекта с различни алгебрични знаци. На това просто, но фундаментално **логическо условие** съответният теоретичен **математически аналог или израз** е дискретната нечетна (знакова) функция на математическия сигнум (Христов, 2015, 2016а).

За съжаление, в икономическото образование и в обществените науки не е известна дискретната функция на математическия сигнум и се прилагат други правила за адитивен и индексен факторен анализ. Според тях в случая на адитивния факторен анализ на продукцията на стоки отделният ефект от промяната на всеки фактор $\Delta \mathrm{p}_i$ и Δq_i може да не се измерва с по-малкото равнище на другия фактор q_i и p_i, а да се използва по-голямото равнище. Тогава, ако за някои стоки двете факторни промени са положителни - $\Delta \mathrm{p}_i > 0$ и $\Delta q_i > 0$, е **неправилно** ефектите от тях да се измерват с по-големите стойности q_{i1} и p_{i1} от отчетната година, или ΔP_{pi}=$\Delta \mathrm{p}_i \times q_{i1}$ и ΔP_{qi}=$\Delta q_i \times \mathrm{p}_{i1}$. Всеки от тези ефекти е **брутен,** защото освен верния нетен ефект съдържа и съвместния ефект $\Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$. Или аналитично, първият брутен ефект е ΔP_{pi}=$\Delta \mathrm{p}_i \times q_{imin} + \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$=$\Delta \mathrm{p}_i \times q_{i0} + \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$ и вторият брутен ефект е ΔP_{qi}=$\Delta q_i \times \mathrm{p}_{imin} + \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$=$\Delta q_i \times \mathrm{p}_{i0} + \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$. Ако прирастът на продукцията на i-та стока ΔP_i се представи със сумата на двата брутни ефекта ΔP_{pi} и ΔP_{qi}, се получава $\Delta P_i = \Delta P_{pi} + \Delta P_{qi} = \Delta \mathrm{p}_i \times q_{i0} + \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i + \Delta q_i \times \mathrm{p}_{i0}$+$\Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$=$\Delta \mathrm{p}_i \times q_{i0} + \Delta q_i \times \mathrm{p}_{i0} + 2\Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$. Това е **невярна сума,** защото е по-голяма с двата съвместни ефекта от **вярната сума** само с единствения съвместен ефект, който се обосновава с дискретната функция на математическия сигнум.

$$\Delta \mathrm{P}_i = \Delta P_{pi} + \Delta P_{qi} + \Delta P_{\mathrm{pq}i} = \Delta \mathrm{p}_i \times q_{i0} + \Delta q_i \times \mathrm{p}_{i0} + \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i.$$

За тези случаи с положителните факторни промени $\Delta \mathrm{p}_i$ и Δq_i дори анализаторът да сбърка с неверните по-големи стойности на другия фактор q_{i1} и p_{i1} от отчетната година, той може веднага да се поправи, след като види, че прирастът на продукцията е по-голям с двата съвместни ефекта. Не е така обаче в следващите случаи на адитивния факторен анализ с другите видове факторни промени.

Ако някои стоки са с обратни отрицателни факторни промени - $\Delta p_i < 0$ и $\Delta q_i < 0$, ефектите от тях също не трябва да се измерват с по-големите стойности на другия фактор, които са от базисната година q_{i0} и p_{i0}, защото $p_{i1} < p_{i0}$ и $q_{i1} < q_{i0}$. Този случай е обратен на предходния и има също един съвместен, но отрицателен ефект. С по-големите стойности на другия фактор q_{i0} и p_{i0} се получават също **два неверни брутни отрицателни ефекта,** защото всеки съдържа верен нетен отрицателен ефект и отрицателен съвместен ефект. Или аналитично, $\Delta P_{pi} = -\Delta \mathrm{p}_i \times q_{i0} = -\Delta \mathrm{p}_i \times q_{i1} - \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$ и $\Delta P_{qi} = -\Delta q_i \times \mathrm{p}_{i0} - \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$. Със сумата на тези неверни брутни ефекти се получава **точното** намаление на продукцията на i-та стока единствено и само ако към тях се прибави също един **неверен** положителен съвместен ефект $(-\Delta \mathrm{p}_i)(-\Delta q_i) = \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$! Той обаче е **логически недопустим,** защото не е възможно от намаления на два фактора да се увеличава зависимата променлива (продукцията). Ако анализаторът не обърне внимание на такива ефекти, той ще работи с неверни решения за някои стоки. Ако обърне внимание, може да смени по-големите стойности на другия фактор от базисната година q_{i0} и p_{i0} с по-малките стойности q_{i1} и p_{i1} от отчетната година, но и това няма да му помогне! С по-малките стойности се получават действително **верните нетни ефекти** $-\Delta \mathrm{p}_i \times q_{i1}$ и $-\Delta q_i \times \mathrm{p}_{i1}$, но едновременно с тях възниква същият **неверен** положителен съвместен ефект $(-\Delta \mathrm{p}_i)(-\Delta q_i) = \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$. С него сумата на трите ефекта показва **по-малко намаление** на продукцията. Следователно **единственото вярно и точно решение** е с дискретната функция на математическия сигнум:

$$\Delta \mathrm{P}_i = \Delta \mathrm{p}_i \times q_{imin} + \Delta q_i \times \mathrm{p}_{imin} + h_i \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i = -\Delta \mathrm{p}_i \times q_{i1} + (-\Delta q_i \times \mathrm{p}_{i1}) + (-1)(-\Delta \mathrm{p}_i)(-\Delta q_i) = -\Delta \mathrm{p}_i \times q_{i1} - \Delta q_i \times \mathrm{p}_{i1} - \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i = -\Delta P_{pi} - \Delta P_{qi} - \Delta P_{\mathrm{p}qi}.$$

Освен някои стоки, които са с еднопосочни факторни промени $\Delta p_i > 0$ и $\Delta q_i > 0$ или с $\Delta p_i < 0$ и $\Delta q_i < 0$, други стоки могат да бъдат с разнопосочни факторни промени $\Delta p_i > 0$ и $\Delta q_i < 0$ или $\Delta p_i < 0$ и $\Delta q_i > 0$. Ефектите от тези разнопосочни факторни промени могат да бъдат също **неверни,** когато не са получени като произведения на промяната на всеки фактор с по-малката стойност на другия фактор от базисната или отчетната година. Например в първия случай, ако положителната факторна промяна $\Delta p_i > 0$ се умножи **неправилно** с по-голямата стойност на другия фактор q_{i0} от базисната година, защото $q_{i1} < q_{i0}$, се получава **неверен брутен ефект** $\Delta P_{pi} = \Delta \mathrm{p}_i \times q_{i0}$. Той съдържа **верен** положителен нетен ефект $\Delta \mathrm{p}_i \times q_{i1}$ и един **фиктивен** (несъществуващ) също положителен съвместен ефект $\Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$, или $\Delta P_{pi} = \Delta \mathrm{p}_i \times q_{i1} + \Delta \mathrm{p}_i \Delta q_i$. В този случай обаче, за да се получи **точното** изменение (увеличението или намалението) в обема на продукцията на i-та стока ΔP_i, другата отрицателна факторна промяна $\Delta q_i < 0$ трябва да се умножи също **неправилно** с по-голямата стойност на другия фактор p_{i1} от отчетната година, защото $p_{i1} > p_{i0}$. По този начин се получава също **неверен брутен ефект** $\Delta P_{qi} = \Delta q_i \times \mathrm{p}_{i1}$. Той съдържа **верен** отрицателен нетен ефект $-\Delta q_i \times \mathrm{p}_{i0}$ и същия по размер **фиктивен** съвместен ефект, но с отрицателен знак $-\Delta\mathrm{p}_i\Delta q_i$, или $\Delta P_{qi} = -\Delta q_i \times \mathrm{p}_{i0} - \Delta\mathrm{p}_i\Delta q_i$. Сумата на двата брутни ефекта е **точно** равна на изменението на продукцията, защото двата фиктивни ефекта с различните алгебрични знаци взаимно се анулират. Или аналитично,

$$\Delta P_i = \Delta P_{\mathrm{p}i} - \Delta P_{qi} = \Delta\mathrm{p}_i \times q_{i1} + \Delta\mathrm{p}_i\Delta q_i + (-\Delta q_i \times \mathrm{p}_{i0}) + (-\Delta\mathrm{p}_i\Delta q_i) = \Delta\mathrm{p}_i \times q_{i1} - \Delta q_i \times \mathrm{p}_{i0}.$$

Това е **вярното решение** с дискретната функция на математическия сигнум с двата верни нетни ефекта **без съвместен ефект,** които са от разнопосочните факторни промени, умножени с по-малките стойности на другия фактор q_{i1} и p_{i0}. Решението е **вярно,** но двата брутни ефекта, от които то се получава, са **неверни** и заблуждават много хора!

По аналогичен начин се получават **неверни** брутни ефекти и за другия (обратен) случай на разнопосочните факторни промени с $\Delta p_i < 0$ и $\Delta q_i > 0$. Ако отрицателната факторна промяна $\Delta p_i < 0$ се умножи **неправилно** с по-голямата стойност на другия фактор от отчетната година q_{i1}, се получава **неверният брутен ефект** $\Delta P_{\mathrm{p}i} = -\Delta\mathrm{p}_i \times q_{i1}$. Той съдържа **верен** отрицателен нетен ефект $-\Delta\mathrm{p}_i \times q_{i0}$ и един **фиктивен** също отрицателен съвместен ефект $-\Delta\mathrm{p}_i\Delta q_i$, или $\Delta P_{qi} = -\Delta\mathrm{p}_i \times q_{i0} - \Delta\mathrm{p}_i\Delta q_i$. За да се получи обаче **точното** изменение (увеличението или намалението) на продукцията ΔP_i на i-та стока, трябва другата положителна факторна промяна $\Delta q_i > 0$ да се умножи също **неправилно** с по-голямата стойност на другия фактор от базисната година p_{i0}, защото $p_{i1} < p_{i0}$. Получава се също **неверен брутен ефект** $\Delta P_{qi} = \Delta q_i \times \mathrm{p}_{i0}$. Той съдържа **верен** положителен нетен ефект $\Delta q_i \times \mathrm{p}_{i1}$ и същия по размер **фиктивен,** абсурден съвместен ефект с положителен знак $+\Delta\mathrm{p}_i\Delta q_i$ от намаляла базисна цена p_{i0}! Сумата на двата брутни ефекта е **точно** равна на изменението (увеличението или намалението) на продукцията ΔP_i, защото двата фиктивни съвместни ефекта с различните алгебрични знаци взаимно се анулират. Или аналитично,

$$\Delta P_i = -\Delta P_{\mathrm{p}i} + \Delta P_{qi} = -\Delta\mathrm{p}_i \times q_{i0} - \Delta\mathrm{p}_i\Delta q_i + \Delta q_i \times \mathrm{p}_{i1} + \Delta\mathrm{p}_i\Delta q_i = -\Delta\mathrm{p}_i \times q_{i0} + \Delta q_i \times \mathrm{p}_{i1}.$$

Това е **вярното** решение с дискретната функция на математическия сигнум с верните нетни ефекти **без съвместен ефект,** които са от разнопосочните факторни промени, умножени с по-малките стойности на другия фактор q_{i0} и p_{i1}. Решението е **вярно** както в предходния случай с разнопосочните факторни промени, но двата брутни ефекта са **неверни** и заблуждават също много хора! Икономическият смисъл на двата фиктивни ефекта е, че през отчетната година е имало **допълнително увеличение на продукцията** от положителния фиктивен ефект и **едновременно** за същата отчетна година е имало в същия размер **допълнително намаление на продукцията** от отрицателния фиктивен ефект. Очевидно пълни безсмислици! Точните и верни действителни ефекти от разнопосочните факторни промени са само **нетните,** определени с дискретната функция на математическия сигнум.

На практика са възможни случаи (според мен те са преобладаващи), когато няма данни за цените p_i и за натуралните количества q_i на отделните стоки, а има само данни за различните еднородни съвкупности с техните средни цени $\bar{p}$ и общи натурални количества Q. За тези случаи предлагам да се работи със средните цени $\bar{p_i}$ на една стока както цените p_i на отделните стоки и с общите натурални количества Q_i както натуралните количества q_i на стоките. Или могат да се направят заместванията $\bar{p_i} = p_i$ и $Q_i = q_i$ за тези i-та, които са за еднородни съвкупности на стоки. Те трябва обаче винаги да се имат предвид при анализа, както и при съставяне на компютърни програми.

С изложения адитивен факторен анализ на продукцията от всяка стока завършва първият етап на този анализ както за еднородните, така и за разнородните съвкупности с данните за цените p_i и натуралните количества q_i на отделните стоки.

2. Адитивен факторен анализ на обема на продукцията от еднородни и разнородни съвкупности на стоките със сумарните ефекти от отделните стоки

Както беше отбелязано, ефектите ΔP_{pi},ΔP_{qi} и ΔP_{pqi} за всичките n на брой стоки могат да бъдат както от еднородни, така и от разнородни съвкупности на стоките. Те се агрегират (сумират) на следващия етап, за да се получат три сумарни ефекта: два нетни $\sum_{i=1}^{n} \Delta P_{pi} = E_p$ и $\sum_{i=1}^{n} \Delta P_{qi} = E_q$, както и съвместен сумарен ефект $\sum_{i=1}^{n} \Delta P_{pqi} = E_{pq}$ за всички стоки. Тези суми са **алгебрични** резултативни величини, защото отделните ефекти в **общия случай** могат да бъдат за някои стоки положителни величини (прирасти), а за други стоки - отрицателни величини (намаления) на базисните продукции ΔP_{i0}. Следователно всяка сума на съответния вид ефект показва **преобладаващ** прираст или намаление на продукцията. Или E_p е сумарният резултативен **нетен** ефект (салдо) от **преобладаващите** положителни или отрицателни нетни ефекти **само** от увеличенията или намаленията на цените на отделните стоки. E_q е сумарният резултативен **нетен** ефект (салдо) от **преобладаващите** положителни или отрицателни **нетни** ефекти **само** от увеличенията или намаленията на натуралните количества на отделните стоки. E_{pq} е сумарният резултативен съвместен ефект (салдо) от **преобладаващите** положителни или отрицателни съвместни ефекти **само** от еднопосочните промени (увеличения или намаления) на цените и натуралните количества на отделните стоки. За всяка от тези суми се оценява със съответния ефект **„приносът“** на всяка стока, който показва източниците на прираст или намаление на продукцията, както и **„общият принос“** на всяка стока в общия прираст или намаление на продукцията от всички стоки. С трите сумарни ефекта се изпълнява строгото условие за еднозначното или единствено логично и математически издържано решение на адитивния факторен анализ $\Delta\mathrm{P} = P_1 - P_0 = \mathrm{E}_p + \mathrm{E}_q + \mathrm{E}_{pq}$. Интерпретацията на този анализ обаче е по-трудна при статистическите съвкупности от интерпретацията на адитивния анализ за отделната стока. Трудността произлиза от появата на сумарен съвместен ефект E_{pq}, алгебричният знак на който може да е **същият** както на единия от двата сумарни нетни ефекта или да е **различен** от алгебричните знаци и на двата ефекта. В общия случай с всичките видове факторни промени на отделните стоки, дори само някои от тях да бъдат със съвместни ефекти, но които са с разнопосочни алгебрични знаци, винаги може да се получи един, макар и **минимален**, сумарен съвместен ефект за цялата съвкупност (Христов, 2016а).

На следващ етап трите суми на ефектите се отнасят към сумата на продукциите на всички стоки в съвкупността от базисната година $\sum_{i=1}^{n} P_{i0} = P_0$, за да се получи **относителната форма** на адитивния факторен анализ за цялата съвкупност. Тази форма трябва да изпълнява същото строго условие за еднозначно решение на адитивния факторен анализ $\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{E_P}{P_0} + \frac{E_q}{P_0} + \frac{E_{pq}}{P_0}$ както при адитивния анализ на продукцията на отделната стока $\frac{\Delta\mathrm{P}}{P_0} = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$. За този анализ се използва също едно важно свойство както за продукцията на отделната стока. То се отнася за всеки два взаимообратими случая със сумарни ефекти, при разменени места на данните за двете сравнявани години, от които се получават едни и същи сумарни ефекти, равни по абсолютна стойност, но с обратни алгебрични знаци (Христов, 2015, 2016а). Общо всички случаи на адитивния и индексния факторен анализ на продукцията на стоките са **осем** със следните комбинации на трите сумарни ефекта:

1. $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$
2. $\mathrm{E}_p < 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$
3. $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$

4. $\mathrm{E}_p <0,\ \mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$
5. $\mathrm{E}_p >0,\ \mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$
6. $\mathrm{E}_p <0,\ \mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$
7. $\mathrm{E}_p >0,\ \mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$
8. $\mathrm{E}_p <0,\ \mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$.

Освен посочените осем случая с трите сумарни ефекта е възможно по-скоро хипотетично отколкото практически да възникнат два частни случая само с двата нетни сумарни ефекта, които имат противоположни алгебрични знаци $\mathrm{E}_p > 0,\ \mathrm{E}_q < 0$ или $\mathrm{E}_p <0,\ \mathrm{E}_q > 0$. Ако все пак възникне такъв случай без сумарен съвместен ефект, неговото решение с индексния факторен анализ е по-лесно в сравнение с решенията на случаите с трите ефекта.

3. Индексен факторен анализ на обема на продукцията от еднородни и разнородни съвкупности на стоките със сумарните ефекти от отделните стоки

Това е най-сложният и труден дискретен факторен анализ на икономическите явления. В теоретично и приложно отношение той представлява по-нататъшно развитие на индексния факторен анализ на продукцията на отделната стока и на продукцията от еднородните съвкупности с агрегираните данни за $\overline{\mathrm{p}}$ и Q на всички стоки (Христов, 2015, 2016б).

Според методиките за тези индексни анализи факторните индекси за цените и натуралните количества на стоките $I_{\mathrm{p}} = \frac{p_1}{p_0}$ и $I_q = \frac{q_1}{q_0}$ могат да се преобразуват и изразят с верните и точни ефекти от предходните адитивни факторни анализи. Именно с тези ефекти се съставят най-напред **нетните** факторни индекси за относителните промени само на цените на стоките $I_{\mathrm{p}} = 1 + \frac{p_{\mathrm{p}}}{p_0}$, за относителните промени само на техните натурални количества $I_q = 1 + \frac{p_q}{p_0}$ и за относителните съвместни промени на цените и натуралните количества $I_{\mathrm{p}q} = 1 + \frac{p_{\mathrm{p}q}}{p_0}$, където ефектите $\frac{p_{\mathrm{p}}}{p_0}, \frac{p_q}{p_0}$ и $\frac{p_{\mathrm{p}q}}{p_0}$ са със съответните алгебрични знаци.

С тези нетни факторни индекси се проверява дали произведението им е равно на резултативния индекс за продукцията $I_0 = \frac{p_1}{p_0}$ (отношението между нейните обеми от отчетната и базисната година). Проверките се извършват според ефектите от четирите решения на адитивния факторен анализ на продукцията на отделната стока за еднопосочните и разнопосочните факторни промени в предходната точка 1 на настоящата статия.

При $\Delta P_p > 0$ и $\Delta P_q > 0$, $I_p \times I_q = \frac{p_1}{p_0} \times \frac{q_1}{q_0} = \left(1 + \frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{P}_0}\right)\left(1 + \frac{\Delta P_q}{P_0}\right) = 1 + \frac{\Delta P_{\mathrm{p}}}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{\Delta P_{\mathrm{p}}}{P_0} \times \frac{\Delta P_q}{P_0} = 1 + \frac{\Delta P_{\mathrm{p}}}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{\Delta P_{\mathrm{p}q}}{P_0} = I_0$.

При $\Delta P_p < 0$ и $\Delta P_q < 0$, $I_p \times I_q = \frac{p_1}{p_0} \times \frac{q_1}{q_0} = \left(1 - \frac{\Delta P_{\mathrm{p}}}{\mathrm{P}_0}\right)\left(1 - \frac{\Delta P_q}{P_0}\right) > I_0$.

Това произведение на нетните факторни индекси с отрицателните ефекти не изпълнява индексното равенство. За целта всеки нетен факторен индекс се намалява с **реалния** отрицателен съвместен ефект $\left(-\frac{\Delta P_{\mathrm{p}q}}{P_0}\right)$. С този съвместен ефект се изпълнява индексното равенство:

$$\text{в}I_p \times \text{в}I_q = \left(1 - \frac{\Delta P_{\mathrm{p}}}{\mathrm{P}_0} - \frac{\Delta P_{\mathrm{p}q}}{P_0}\right)\left(1 - \frac{\Delta P_q}{\mathrm{P}_0} - \frac{\Delta P_{\mathrm{p}q}}{P_0}\right) = 1 - \frac{\Delta P_{\mathrm{p}}}{\mathrm{P}_0} - \frac{\Delta P_q}{P_0} - \frac{\Delta P_{\mathrm{p}q}}{P_0} = I_0.$$

Равенството е изпълнено само защото решението е с **два брутни факторни индекса** в$I_p = \left(1 - \frac{\Delta P_{\mathrm{p}}}{\mathrm{P}_0} - \frac{\Delta P_{\mathrm{p}q}}{P_0}\right) < I_p$ и в$I_q = \left(1 - \frac{\Delta P_q}{\mathrm{P}_0} - \frac{\Delta P_{\mathrm{p}q}}{P_0}\right) < I_q$. Всеки от тях съдържа **брутните отрицателни ефекти** от адитивния факторен анализ! От своя страна, всеки брутен ефект съдържа съответния нетен отрицателен ефект и отрицателния съвместен ефект. Решението на този индексен анализ е само с един отрицателен съвместен ефект и двата отрицателни нетни ефекта от адитивния факторен анализ!

При разнопосочните факторни промени с $\Delta P_p > 0$ и $\Delta P_q < 0$, $I_p \times I_q = \frac{p_1}{p_0} \times \frac{q_1}{q_0} = \left(1 + \frac{\Delta P_{\mathrm{p}}}{\mathrm{P}_0}\right)\left(1 - \frac{\Delta P_q}{P_0}\right) < I_0$.

С посочените нетни факторни индекси $I_p > 1$ и $I_q < 1$ също не се изпълнява индексното равенство. За да бъде изпълнено, се въвежда положителният **фиктивен** съвместен ефект $\frac{f\Delta P_{\mathrm{p}q}}{P_0}$ (от адитивния факторен анализ) в нетния факторен индекс $I_p > 1$, за да се получи **брутният факторен индекс** в$I_p = \left(1 + \frac{\Delta P_{\mathrm{p}}}{\mathrm{P}_0} + \frac{f\Delta P_{\mathrm{p}q}}{P_0}\right) > I_{p.}$ С този брутен факторен индекс вече се изпълнява индексното равенство:

$$\text{в}I_p \times I_q = \left(1 + \frac{\Delta P_{\mathrm{p}}}{\mathrm{P}_0} + \frac{f\Delta P_{\mathrm{p}q}}{P_0}\right)\left(1 - \frac{\Delta P_q}{\mathrm{P}_0}\right) = 1 + \frac{\Delta P_{\mathrm{p}}}{\mathrm{P}_0} - \frac{\Delta P_q}{P_0} = I_0.$$

От решението е **отпаднал** фиктивният съвместен ефект и са **останали** само реалните ефекти от адитивния факторен анализ!

В обратния случай с $\Delta P_p < 0$ и $\Delta P_q > 0$, $I_p \times I_q = \frac{p_1}{p_0} \times \frac{q_1}{q_0} = \left(1 - \frac{\Delta P_p}{P_0}\right)\left(1 + \frac{\Delta P_q}{P_0}\right) < I_0$ също не се изпълнява индексното равенство. Решението е също с допълнителния **фиктивен** положителен съвместен ефект $\frac{f\Delta P_{pq}}{P_0}$ (от адитивния факторен анализ) в нетния факторен индекс $I_q > 1$, за да се получи **брутният факторен индекс** в$I_q = \left(1 + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{f\Delta P_{pq}}{P_0}\right) > I_q$. С този брутен факторен индекс се изпълнява индексното равенство:

$$I_p \times \text{в}I_q = \left(1 - \frac{\Delta P_p}{P_0}\right)\left(1 + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{f\Delta P_{pq}}{P_0}\right) = 1 - \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} = I_0.$$

От това решение също е **отпаднал** фиктивният съвместен ефект и са **останали** само **реалните** ефекти от адитивния факторен анализ!

Обобщението за факторните индекси е, че те се подразделят на **нетни и брутни.** **Нетните** съдържат само верните и точни нетни ефекти от адитивния факторен анализ, които са определени с дискретната функция на математическия сигнум. Такива са факторните индекси в първия случай с едновременните увеличения на двата фактора и факторните индекси $I_q < 1$ и $I_p < 1$ в третия и четвъртия случай с разнопосочните факторни промени. **Брутните** факторни индекси съдържат освен нетните ефекти от адитивния анализ още и допълнителни съвместни ефекти. Според съвместните ефекти брутните индекси се подразделят на факторни индекси с **реални** съвместни ефекти (вторият случай с двата отрицателни съвместни ефекта от едновременните намаления на двата фактора) и факторни индекси с **фиктивни** съвместни ефекти (третият и четвъртият случай с разнопосочните факторни промени). При тези случаи на индексния факторен анализ на обемни резултативни величини като продукцията фиктивните съвместни ефекти са **винаги** положителни величини и се прибавят към нетния факторен индекс, който е **по-голям от 1.** От решенията на тези случаи обаче **отпадат** фиктивните ефекти и **остават** само реалните ефекти от адитивния факторен анализ. На практика, ако и двата факторни индекса са по-големи от 1 и съдържат само нетни ефекти, те са **нетни индекси.** Такива са индексът за цената на стоката $I_p = \frac{p_1}{p_0} = (1 + \frac{\Delta P_p}{P_0}) > 1$ и индексът за нейното натурално количество $I_q = \frac{q_1}{q_0} = (1 + \frac{\Delta P_q}{P_0}) > 1$. Ако и двата факторни индекса са по-малки от 1, те са **брутни.** За цената на стоката в$I_p = \frac{p_1}{p_0} = \Big(1 - \frac{\Delta P_p}{P_0} -$

$\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\Big) < 1$ и за нейното натурално количество в$I_q = \frac{q_1}{q_0} = (1 - \frac{\Delta P_q}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}) < 1$. За другите случаи с разнопосочните факторни промени, ако $I_p > 1$ и $I_q < 0$, индексът за цената на стоката е **брутен** в$I_p = \frac{p_1}{p_0} = (1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{f\Delta P_{pq}}{P_0}) > 1$, а индексът за натуралното количество е **нетен** $I_q = \frac{q_1}{q_0} = (1 - \frac{\Delta P_q}{P_0}) < 1$. В обратния случай на разнопосочните факторни промени, ако $I_p < 1$ и $I_q > 1$, индексът за цената е **нетен** $I_p = \frac{p_1}{p_0} = (1 - \frac{\Delta P_p}{P_0}) < 1$, докато индексът за натуралното количество е **брутен** в$I_q = \frac{p_1}{p_0} = (1 + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{f\Delta P_{pq}}{P_0}) > 1$.

Крайният извод от представените накратко авторови методики за адитивен и индексен факторен анализ на продукцията на отделната стока е, че от адитивния факторен анализ **няма никакви фиктивни ефекти.** Такива ефекти възникват **само** при индексния факторен анализ във факторните индекси, които са по-големи от 1 (Христов, 2015). Същият краен извод се отнася и за адитивния и индексния факторен анализ на продукцията **само** от еднородните съвкупности на стоките (Христов, 2016а и 2016б).

С това представяне на факторните индекси се разкриват големите аналитични възможности на нетните и брутните индекси.

От въвеждането на брутните факторни индекси в индексния анализ произлиза **различието** между относителното (процентно) изменение на фактора и относителното (процентно) изменение на зависимата променлива или ефекта от това факторно изменение. Например при едновременните факторни намаления брутният индекс на всеки фактор показва **по-голямо** относително (процентно) намаление на фактора в сравнение с относителния отрицателен нетен ефект от факторното намаление. Причината за това различие е, че по-голямото относително факторно намаление е **брутно** (сумата на отрицателния нетен ефект и отрицателния съвместен ефект). При разнопосочните факторни промени различието е също в по-големите увеличения на факторните променливи в сравнение с положителните ефекти от тези увеличения. Всеки брутен факторен индекс, който е по-голям от 1, показва по-голямо относително (процентно) увеличение на фактора в сравнение с относителния положителен нетен ефект от факторното увеличение. Причината за това различие е същата както посочената по-горе. Относителното факторно увеличение е **по-голямо,** защото е **брутно** (сума на положителния нетен ефект и положителния фиктивен съвместен ефект). Следователно от двата факторни индекса при разнопосочните факторни промени **единственият верен и точен** е нетният факторен индекс, по-малък от 1, който съдържа **само** нетен отрицателен ефект.

С брутните и нетните факторни индекси се установява **точната аналитична връзка** между резултатите от адитивния и от индексния факторен анализ. Крайните резултати от адитивния анализ са относителните ефекти, сумата на които е равна на относителния прираст или намаление на продукцията, или аналитично $\frac{\Delta \mathrm{P}}{P_0} = \frac{\Delta P_p + \Delta P_q + \Delta P_{pq}}{P_0}$. От тези резултати се преминава много лесно в същите крайни резултати от индексния факторен анализ: $1 + \frac{\Delta \mathrm{P}}{P_0} = 1 + \frac{\Delta P_p + \Delta P_q + \Delta P_{pq}}{P_0}$, откъдето $I_0 = 1 + \frac{\Delta P_p + \Delta P_q + \Delta P_{pq}}{P_0}$. Тази аналитична зависимост е **критерият** за верен и точен индексен факторен анализ!

С брутните факторни индекси моите методики за индексен факторен анализ са **принципно различни** от всички други методики за този анализ у нас и в чужбина. Основната причина за това е коренно различният методологичен подход, с който се съставят моите методики за индексен анализ. Той **винаги** започва с предходен адитивен факторен анализ на разликата на обемната резултативна величина (продукцията на стока) от промените (разликите) на двата фактора, в случая средната цена на стоката и нейното натурално количество. Адитивният анализ се извършва **винаги** с дискретната функция на математическия сигнум, само с която могат да се получават аналитично **верните и точни ефекти** (прирасти и/или намаления на продукцията) от факторните разлики на цената и на натуралното количество на стоката. След това се преминава в индексен факторен анализ, в който факторните индекси за цената и за натуралното количество на стоката се **представят** с нетните ефекти от адитивния анализ. С цел да се изпълнява строгото условие за равенство на резултативния индекс на продукцията с произведението на факторните индекси те се подразделят на **нетни и брутни** според посочените правила. В заключение, за разлика от този методологически подход индексолозите, които работят с традиционните индексни методи, **не правят разлика** между нетните и брутните факторни индекси и не могат да покажат крайните **едни и същи резултати** от двете форми (адитивната и индексната) на единния дискретен статистически факторен анализ.

С представения методологичен подход защитих като верни факторните индекси за цените на Ласпейрес и Пааше (Христов, 2015). Те обаче не са множествени, а са **единични** за промените на средната цена на **отделната стока** и на нейното натурално количество. Когато се опитах със същия методологичен подход да представя множествените факторни индекси за цените на **съвкупности от стоки,** се оказа, че множествените индекси за цените на тези двама автори $I_p(q_0)$ и $I_p(q_1)$ и съответните множествени индекси за натуралните количества на стоките (физическия обем на продукцията)

$I_q(p_1)$ и $I_q(p_0)$ са методологично неиздържани, неточни и следователно **неверни!** Това може да се покаже с адитивната форма на тези множествени индекси. При $I_0 = I_p(q_0) \times I_q(p_1)$, от $I_p(q_0)= \frac{\sum p_{i1}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}}$ се преминава в ефекта $\Delta \mathrm{P_p} = \sum p_{i1}\, q_{i0} - \sum p_{i0}q_{i0} = \sum(p_{i1}\, q_{i0} - p_{i0}q_{i0}) = \sum \Delta p_i \times q_{i0}$ и от $I_q(p_1\,) = \frac{\sum q_{i1}p_{i1}}{\sum q_{i0}p_{i1}}$ се преминава в ефекта $\Delta P_q = \sum q_{i1}p_{i1} - \sum q_{i0}p_{i1} = \sum(q_{i1}p_{i1} - q_{i0}p_{i1}) = \sum \Delta q_{i1} \times p_{i1}$. Според получените ефекти промените на всеки фактор се умножават с **предварително избраните стойности на другия фактор само от базисната година q_{i0} и само от отчетната година p_{i1}**. Според дискретната функция на математическия сигнум обаче трябва да се използват само **по-малките стойности на другия фактор** независимо дали те са от базисната, или от отчетната година.

При другата зависимост $I_0 = I_p(q_1) \times I_q(p_0)$ се получават аналогични условни и неточни ефекти. От $I_p(q_1) = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{\sum p_{i0}q_{i1}}$ се преминава в ефекта $\Delta \mathrm{P_p} = \sum p_{i1}\, q_{i1} - \sum p_{i0}q_{i1} = \sum(p_{i1}\, q_{i1} - p_{i0}q_{i1}) = \sum \Delta p_i \times q_{i1}$ и от $I_q(p_0\,) = \frac{\sum q_{i1}p_{i0}}{\sum q_{i0}p_{i0}}$ се преминава в ефекта $\Delta P_q = \sum q_{i1}p_{i0} - \sum q_{i0}p_{i0} = \sum(q_{i1}p_{i0} - q_{i0}p_{i0}) = \sum \Delta q_{i1} \times p_{i0}$. Или и при тази адитивна форма на анализа промените на всеки фактор се умножават също с **предварително избраните стойности на другия фактор само от отчетната година q_{i1} и само от базисната година p_{i0}.** Изборът не е според **по-малките стойности на другия фактор.**

Изводът от адитивната форма на множествените факторни индекси е, че с тях няма единствено решение. Двете условни решения обаче са неточни и **неверни,** защото винаги ще съдържат фиктивни ефекти за някои стоки. Не помагат и никакви осреднявания, като средни геометрични, аритметични, претеглени и други, когато с неточните и неверни факторни индекси се получават **неверни решения.**

За преодоляването на този проблем се предлага **новата методика** за индексен факторен анализ на продукцията на стоки от всякакви съвкупности (еднородни и/или разнородни). Според изложения методологичен подход най-напред се съставят **нетните факторни индекси с относителните сумарни ефекти за всички стоки** от предходната точка 2 на статията, $I_{p\mathrm{e}} = 1 + \frac{E_p}{P_0}$, $I_{q\mathrm{e}} = 1 + \frac{E_q}{P_0}$ и $I_{\mathrm{p}q\mathrm{e}} = 1 + \frac{E_{\mathrm{p}q}}{P_0}$, където сумарните ефекти са със съответните алгебрични знаци[1].

Ако единият от сумарните ефекти е с различен алгебричен знак от знаците на другите два ефекта, се предлага случаят да бъде с **разнопосочни** факторни промени. Таки-

[1] С цел да се различават факторните индекси за разнородните съвкупности от факторните индекси само за еднородните съвкупности първите са означени долу вдясно с допълнителния символ „е“.

ва са първите шест случая от всичките осем, докато само последните два случая са с **еднопосочни** факторни промени, защото седмият случай е с трите положителни сумарни ефекта $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$, а осмият е с трите отрицателни ефекта $\mathrm{E}_p < 0$, $\mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$. Предлагам решенията на шестте случая с разнопосочните факторни промени да бъдат с трите нетни факторни индекса. Не препоръчвам преминаване от трите нетни индекса в два брутни факторни индекса, защото такова преминаване е възможно, но ще бъде само формално математическо решение. По мое мнение за икономическия анализ е много важно и полезно да се **запазят** отделните разнопосочни факторни промени с различните техни влияния (ефекти) за увеличения и/или намаления на продукцията. За разлика от случаите с разнопосочните факторни промени обаче препоръчвам за двата случая с еднопосочните факторни промени **преминаване** от трите нетни факторни индекса в два **брутни** факторни индекса.

След това с трите нетни факторни индекса се проверява индексното равенство $I_0 = I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe}$. Ако то е изпълнено, решението на индексния факторен анализ е с трите нетни факторни индекса. Ако същото равенство не е изпълнено както при шестте случая на ефектите от разнопосочните факторни промени, при които $I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe} < I_0$, се предлага отделно решение на всеки един от тези случаи.

Решенията от разнородните съвкупности на стоките се различават също при разнопосочните и еднопосочните факторни промени. По-конкретно, при разнопосочните факторни промени **нетните** факторни индекси с положителните или отрицателните сумарни ефекти измерват **нетните** ефекти от **преобладаващите** увеличения и/или намаления на цените, на натуралните количества и съвместните увеличения или намаления на цените и натуралните количества на разнородните стоки при условията на **едновременни** разнопосочни промени на двата фактора „simultaneous changes“ (The Oxford Paperback Dictionary 1994). Това означава например, че ако нетният факторен индекс е $I_{pe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0}\right) > 1$, той измерва **само влиянието на преобладаващото относително увеличение** на цените на едни стоки с положителния нетен ефект $\frac{E_p}{P_0} > 0$ в сравнение с едновременното **намаление** на цените на останалите стоки с отрицателен нетен ефект. По същия начин, ако нетният индекс за натуралните количества на разнородните стоки е $I_{qe} = \left(1 + \frac{E_q}{P_0}\right) > 1$, той измерва **само влиянието на преобладаващото относително увеличение** на натуралните количества на дадени стоки с положителния нетен ефект $\frac{E_q}{P_0} > 0$ в сравнение с едновременното **намаление** на натуралните количества на други стоки с отрицателен нетен ефект. По същия начин, ако нетният факторен индекс е $I_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{pq}}{P_0}\right) > 1$, той измерва **само влиянието на съвместните преобладаващи относителни увеличения** на цените и натуралните количества на определени стоки в сравнение с едновременните съвместни относителни **намаления** на цените и натуралните количества на други стоки. При този начин на съставяне на нетните факторни индекси с нетните сумарни положителни ефекти обаче са необходими още и **фиктивни** положителни ефекти, за да се изпълнява индексното равенство. Те се прибавят към нетните факторни индекси с положителните реални нетни ефекти (Христов, 2016б). Така се получават **брутните** факторни индекси. Ако само единият от трите нетни факторни индекса е по-малък от 1, той е **единственият точен факторен индекс с отрицателния нетен ефект,** който не трябва да се превръща в брутен индекс с фиктивен ефект. Брутните индекси с реалните нетни и фиктивните ефекти измерват общите факторни промени за преобладаващите увеличения и/или намаления на цените, натуралните количества и на техните съвместни промени. По този начин те изпълняват условието за **независимост** на факторните индекси, а чрез него и индексното равенство. Участието на фиктивен ефект в един брутен факторен индекс обаче означава на практика, че нетният ефект в брутния индекс е винаги **по-малък** по абсолютна стойност от прираста или намалението на индекса. От тази разлика произлиза необходимостта и познавателното значение на фиктивните ефекти, а чрез тях и на индексния факторен анализ.

Когато с нетните факторни индекси не се изпълнява индексното равенство, защото $\boldsymbol{I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe} < I_0}$, определянето на брутните факторни индекси и на фиктивните положителни ефекти в тях се извършва по два начина за първите шест случая с разнопосочните факторни промени:

1. $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$
2. $\mathrm{E}_p < 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$
3. $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$
4. $\mathrm{E}_p < 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$
5. $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$
6. $\mathrm{E}_p < 0$, $\mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$.

Двата начина за определяне на брутните факторни индекси и на фиктивните ефекти в тях са според наличието на само един нетен факторен индекс по-малък от 1 или и на два нетни факторни индекса, които са по-малки от 1. Първият начин е за решението на случаите, които са само с един сумарен ефект по-малък от 0 в нетния факторен индекс. Именно с него се съставя единственият от трите нетни факторни индекса, който е по-малък от 1. Това са **първият случай** със сумарните ефекти $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$, **четвъртият случай** със сумарните ефекти $\mathrm{E}_p < 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$ и **петият случай** със сумарните ефекти $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$.

Както беше отбелязано, в моите предходни публикации за индексния факторен анализ на продукцията на отделната стока и от еднородните съвкупности на стоките е показано, че при разнопосочните факторни промени факторният индекс, който е само с нетен отрицателен ефект, е **единственият нетен, верен и точен индекс, който не се нуждае от фиктивни ефекти** (Христов, 2015, 2016б). Това правило важи и за настоящите случаи със сумарните ефекти, докато останалите два нетни факторни индекса, които са по-големи от 1, **трябва да се увеличат с фиктивни положителни ефекти,** за да могат заедно с най-малкия нетен факторен индекс (по-малкия от 1) да изпълняват индексното равенство.

За целта предлагам да се състави **квадратно уравнение,** с което да се определят двата **брутни** индекса. Те са двата нетни факторни индекса с положителните нетни ефекти, които са увеличени също с два положителни фиктивни ефекта. От това квадратно уравнение произлиза и името на метода на квадратното уравнение.

За първия случай с трите нетни ефекта $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$ се съставят най-напред трите **нетни** факторни индекса $I_{\mathrm{p}e} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0}\right) > 1$, $I_{qe} = \left(1 - \frac{E_q}{P_0}\right) < 1$ и $I_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{pq}}{P_0}\right) > 1$. Ако тези нетни факторни индекси не изпълняват индексното равенство, защото $I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe} < I_0$, този случай се решава с метода на квадратното уравнение. С него се намират двата брутни факторни индекса в$I_{pe} > 1$ и в$I_{pqe} > 1$ чрез тяхното произведение в$I_{pe} \times$ в$I_{pqe} = \frac{I_0}{I_{qe}}$. Те са по-големи от двата нетни факторни индекса $I_{pe} > 1$ и $I_{pqe} > 1$ с двата допълнителни фиктивни положителни ефекта. Ако $I_{pe} > I_{pqe}$, квадратното уравнение е в$I_{pe} \times$ в$I_{pqe} = \left(I_{pe} + \frac{E_p}{E_{pq}} x\right)\left(I_{pqe} + x\right) = \frac{I_0}{I_{qe}}$. В това уравнение неизвестното x е по-малкият фиктивен положителен ефект $\frac{fE_{pq}}{P_0} > 0$, който се прибавя към по-малкия нетен факторен индекс $I_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{pq}}{P_0}\right) > 1$. Изразът $\frac{E_p}{E_{pq}} x$ е за по-големия фиктивен положителен ефект $\frac{fE_p}{P_0} > 0$, който се прибавя към по-големия нетен факторен индекс $I_{pe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0}\right) > 1$. От решението на уравнението се намират двата положителни фиктивни ефекта $\frac{fE_p}{P_0}$ >0 и $\frac{fE_{pq}}{P_0}$ >0, а с тях и двата брутни факторни индекса в$I_{pe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0} + \frac{fE_p}{P_0}\right)$ и в$I_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{pq}}{P_0} + \frac{fE_{pq}}{P_0}\right)$. С произведението на тези брутни индекси и нетния факторен индекс с отрицателния нетен ефект $I_{qe} = \left(1 - \frac{E_q}{P_0}\right)$ <1 се изпълнява индексното равенство

$$\text{в}I_{pe} \times I_{qe} \times \text{в}I_{pqe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0} + \frac{fE_p}{P_0}\right)\left(1 - \frac{E_q}{P_0}\right)\left(1 + \frac{E_{pq}}{P_0} + \frac{fE_{pq}}{P_0}\right) = I_0 \,.$$

От това решение **отпадат** фиктивните ефекти и **остават** само реалните от предходния адитивен факторен анализ:

$$\text{в}I_{pe} \times I_{qe} \times \text{в}I_{pqe} = 1 + \frac{E_p}{P_0} - \frac{E_q}{P_0} + \frac{E_{pq}}{P_0} = I_0 \text{ (Христов, 2016а).}$$

Другите два случая с трите сумарни ефекта, единият от които е с отрицателен знак, са четвъртият и петият от общо шестте случая на ефекти от разнопосочните факторни промени. Индексният факторен анализ на продукцията в тези случаи се решава също с метода на квадратното уравнение. По-конкретно, четвъртият случай е с трите сумарни ефекта E_p <0, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$, с които се съставят трите нетни факторни индекса $I_{pe} = \left(1 - \frac{E_p}{P_0}\right) < 1$, $I_{qe} = \left(1 + \frac{E_q}{P_0}\right)$ >1 и $I_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) > 1$. Ако с тези нетни факторни индекси не се изпълнява индексното равенство, защото $I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe} < I_0$, се преминава към решение на случая с квадратното уравнение, от което се намират двата брутни факторни индекса вI_{qe} >1 и в$I_{pqe} > 1$. Ако $I_{qe} > I_{pqe}$, квадратното уравнение е в$I_{qe} \times$ в$I_{pqe} = \left(I_{qe} + \frac{E_q}{E_{\text{pq}}} x\right)\left(I_{pqe} + x\right) = \frac{I_0}{I_{\text{pe}}}$. От решението на това уравнение се намират брутните факторни индекси с двата фиктивни положителни ефекта $\frac{E_q}{E_{\text{pq}}} x = \frac{fE_q}{P_0} > 0$ и $x = \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0} > 0$. Или в$I_{qe} = \left(1 + \frac{E_q}{P_0} + \frac{fE_q}{P_0}\right)$ и в$I_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} + \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}\right)$. С тези брутни факторни индекси и нетния факторен индекс с отрицателния ефект $I_{pe} = \left(1 - \frac{E_p}{P_0}\right) < 1$ се изпълнява индексното равенство

$$I_{pe} \times \text{в}I_{qe} \times \text{в}I_{pqe} = \left(1 - \frac{E_p}{P_0}\right)\left(1 + \frac{E_q}{P_0} + \frac{fE_q}{P_0}\right)\left(1 + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} + \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}\right) = I_0.$$

От решението **отпадат** фиктивните ефекти и **остават** само реалните от предходния адитивен факторен анализ:

$$I_{pe} \times \text{в}I_{qe} \times \text{в}I_{pqe} = 1 - \frac{E_p}{P_0} + \frac{E_q}{P_0} + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} = I_0 \text{ (Христов, 2016а).}$$

Другият (пети) случай е с двата положителни сумарни ефекта $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и отрицателния $\mathrm{E}_{pq} < 0$. С тях трите **нетни** факторни индекса са $I_{pe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0}\right) > 1$, $I_{qe} = \left(1 + \frac{E_q}{P_0}\right) > 1$ и нетният факторен индекс с отрицателния ефект $I_{pqe} = \left(1 - \frac{E_{pq}}{P_0}\right) < 1$. Тези факторни индекси също не могат да изпълняват индексното равенство, защото $I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe} < I_0$. За да се изпълни това равенство, индексният факторен анализ на продукцията се решава също с метода на квадратното уравнение за двата брутни факторни индекса вI_{pe} и вI_{qe} чрез тяхното произведение. При $I_{pe} > I_{qe}$ квадратното уравнение е в$I_{pe} \times$ в$I_{qe} = \left(I_{\mathrm{pe}} + \frac{E_p}{E_q}x\right) \times \left(I_{qe} + x\right) = \frac{I_0}{I_{pqe}}$. Ако $I_{pe} < I_{qe}$, уравнението е $\left(I_{\mathrm{pe}} + x\right)\left(I_{qe} + \frac{E_q}{E_{\mathrm{p}}}x\right) = \frac{I_0}{I_{pqe}}$. От решението на уравнението $\left(I_{\mathrm{pe}} + \frac{E_p}{E_q}x\right)\left(I_{qe} + x\right) = \frac{I_0}{I_{pqe}}$ се намират двата брутни факторни индекса с двата фиктивни положителни ефекта $\frac{E_p}{E_q}x = \frac{fE_p}{P_0} > 0$ и $x = \frac{fE_q}{P_0} > 0$. Или в$I_{pe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0} + \frac{fE_p}{P_0}\right)$ и в$I_{qe} = \left(1 + \frac{E_q}{P_0} + \frac{fE_q}{P_0}\right)$. С тези брутни факторни индекси и нетния факторен индекс с отрицателния ефект $I_{pqe} = \left(1 - \frac{E_{\mathrm{pq}}}{P_0}\right) < 1$ се изпълнява индексното равенство

$$\text{в}I_{pe} \times \text{в}I_{qe} \times I_{pqe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0} + \frac{fE_p}{P_0}\right)\left(1 + \frac{E_q}{P_0} + \frac{fE_q}{P_0}\right)\left(1 - \frac{E_{pq}}{P_0}\right) = I_0.$$

От решението **отпадат** фиктивните ефекти и **остават** само реалните от предходния адитивен факторен анализ:

$$\text{в}I_{pe} \times \text{в}I_{qe} \times I_{pqe} = 1 + \frac{E_p}{P_0} + \frac{E_q}{P_0} - \frac{E_{\mathrm{pq}}}{P_0} = I_0 \text{ (Христов, 2016а).}$$

Останалите три случая с трите сумарни ефекта от разнопосочните факторни промени са **вторият** с ефектите $\mathrm{E}_p < 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$, **третият** с ефектите $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$ и **шестият случай** с ефектите $\mathrm{E}_p < 0$, $\mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$. Всички тези случаи се характеризират с един положителен сумарен ефект и два отрицателни сумарни ефекта. Индексният факторен анализ на продукцията с тях е най-сложният и труден в сравнение с другите случаи. С посочените ефекти се образуват два нетни факторни индекса по-малки от 1 и един нетен факторен индекс по-голям от 1. Ако произведението на трите нетни факторни индекса не изпълнява индексното равенство, защото е **по-малко** от резултативния индекс на продукцията I_0, се налага в двата индекса, които са по-малки от 1, да се **добавят** два фиктивни отрицателни ефекта, а в нетния факторен индекс, който е по-голям от 1, да се **добави** фиктивен положителен ефект. При тези условия обаче решението на индексния факторен анализ на продукцията става извънредно трудно. По тази причина за същото решение предлагам един по-дълъг и сложен, но точен **метод на реципрочните индекси,** който включва метода на квадратното уравнение. Точният метод на реципрочните индекси се основава на строгото правило за **реципрочността** на всички индекси (резултативния и двата факторни) на всеки **два взаимообратими случая** с едни и същи данни, но с разменени места на данните за базисната и отчетната година (Христов, 2015, 2016а, 2016б). С адитивния факторен анализ на продукцията от двата взаимообратими случая се получават едни и същи сумарни ефекти по абсолютна стойност E_p, E_q и E_{pq}, но с обратни алгебрични знаци. Няма никакво значение кой е първоначалният случай и кой е следващият (обратен) случай, но трябва предварително да се определи кой е първоначалният, защото следващият е **обратен случай** на него. Следователно ако ефектите за първоначалния случай са $\mathrm{E}_p < 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$, обратният случай ще бъде с ефектите $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q < 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$. При това условие, ако базисният обем на продукцията за първоначалния случай е P_0 от базисната година, за **обратния случай базисният обем на продукцията е $\boldsymbol{P_1}$ от отчетната година на първоначалния случай.** След това с двата базисни обема на продукцията се намират относителните ефекти за двата случая. За случая с трите сумарни ефекта $\mathrm{E}_p < 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} < 0$ относителните ефекти са $\frac{E_p}{P_0} < 0, \frac{E_q}{P_0} > 0$ и $\frac{E_{pq}}{P_0} < 0$, докато за обратния случай относителните ефекти са $\frac{E_p}{P_0} > 0, \frac{E_q}{P_0} < 0$ и $\frac{E_{pq}}{P_0} > 0$, където P_0 е обемът на продукцията P_1 от отчетната година на втория случай. С получените относителни ефекти се съставят трите **нетни** факторни индекса за двата случая. Ако единият от взаимообратимите случаи е с нетните факторни индекси $I_{pe} = \left(1 - \frac{E_p}{P_0}\right) < 1$, $I_{qe} = \left(1 + \frac{E_q}{P_0}\right) > 1$ и $I_{pqe} = \left(1 - \frac{E_{pq}}{P_0}\right) < 1$, обратният случай е с факторните индекси $I'_{pe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0}\right) > 1$, $I'_{qe} = \left(1 - \frac{E_q}{P_0}\right) < 1$ и $I'_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{pq}}{P_0}\right) > 1$[2] . Крайната цел на съставянето на обратния случай е да се получат **единственият верен и точен нетен факторен индекс с отрицателния ефект,** в случая $I'_{qe} = \left(1 - \frac{E_q}{P_0}\right) < 1$, и двата брутни факторни индекса с положителните ефекти в$I'_{pe} > 1$ и в$I'_{pqe} > 1$. Двата брутни индекса за обратния случай се намират с квадратното уравнение чрез тяхното произведение в$I'_{pe} \times$ в$I'_{pqe} = \frac{I'_0}{I'_{qe}}$, където I'_0 е резултативният индекс за продукцията в обратния случай. При $I'_{pe} > \ I'_{pqe}$ решението на квадратното уравнение е в$I'_{pe} \times$ в$I'_{pqe} =$

[2] С цел да се различават нетните факторни индекси на обратните случаи от другите нетни факторни индекси първите са означени със знака „прим“.

$\left(I'_{pe} + \frac{E_{\text{p}}}{E_{\text{pq}}}x\right)\left(I'_{pqe} + x\right) = \frac{I'_0}{I'_{qe}}$. От това решение двата брутни факторни индекса са в$I'_{pe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0} + \frac{fE_p}{P_0}\right)$ и в$I'_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} + \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}\right)$, където $\frac{fE_p}{P_0}$ и $\frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}$ са двата фиктивни положителни ефекта. При обратните случаи те нямат познавателно значение и не са обект на анализ. С двата брутни факторни индекса и нетния факторен индекс с отрицателния ефект $I'_{qe} = \left(1 - \frac{E_q}{P_0}\right) < 1$ се изпълнява индексното равенство за обратния случай, защото в $I'_{pe} \times I'_{qe} \times вI'_{pqe} = I'_0$.

Следващата процедура е определянето на **реципрочните** на тези факторни индекси. С тях се намира търсеното решение на втория случай с трите нетни факторни индекса $I_{pe} < 1$, $I_{qe} > 1$ и $I_{pqe} < 1$. Отделните реципрочни факторни индекси за това решение са rв$I'_{pe} = \frac{1}{вI'_{pe}}$, $rI'_{qe} = \frac{1}{I'_{qe}}$ и rв$I'_{pqe} = \frac{1}{вI'_{pqe}}$, откъдето решението на втория случай с трите нетни факторни индекса $I_{pe} < 1$, $I_{qe} > 1$ и $I_{pqe} < 1$ е rв$I'_{pe} \times rI'_{qe} \times r$в$I'_{pqe} = I_0$. В това решение I_0 е резултативният индекс на продукцията във втория случай. Всеки от двата реципрочни брутни индекса rв$I'_{pe} < 1$ и rв$I'_{pqe} < 1$ съдържа по един реален и един фиктивен отрицателен ефект, докато реципрочният нетен факторен индекс $rI'_{qe} > 1$ съдържа реален и фиктивен положителен ефект.

Последната процедура е от намаленията на двата реципрочни брутни индекса и от увеличението на реципрочния нетен факторен индекс $rI'_{qe} > 1$ да се определят двата фиктивни отрицателни ефекта $\frac{fE_p}{P_0} < 0$ и $\frac{fE_{\text{pq}}}{P_0} < 0$, както и фиктивният положителен ефект $\frac{fE_q}{P_0} > 0$. Или Δrв$I'_{pe} = \left(r\text{в}I'_{pe} - 1\right) < 0$, $\Delta rI'_{qe} = \left(rI'_{qe} - 1\right) > 0$ и Δrв$I'_{pqe} = \left(r\text{в}I'_{pqe} - 1\right) < 0$. Тези разлики се представят като суми от реалните и фиктивните ефекти. По-конкретно,

$\Delta r\text{в}I'_{pe} = -\frac{E_p}{P_0} - \frac{fE_p}{P_0}$, откъдето $-\frac{fE_p}{P_0} = -\frac{E_p}{P_0} - \frac{fE_p}{P_0} - \left(-\frac{E_p}{P_0}\right) = \left(\Delta r\text{в}I'_{pe} + \frac{E_p}{P_0}\right) < 0$,

$\Delta rI'_{qe} = \frac{E_q}{P_0} + \frac{fE_q}{P_0}$, откъдето $\frac{fE_q}{P_0} = \frac{E_q}{P_0} + \frac{fE_q}{P_0} - \frac{E_q}{P_0} = \left(rI'_{qe} - \frac{E_q}{P_0}\right) > 0$,

$\Delta r\text{в}I'_{pqe} = -\frac{E_{\text{pq}}}{P_0} - \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}$, откъдето $-\frac{fE_{\text{pq}}}{P_0} = -\frac{E_{\text{pq}}}{P_0} - \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0} - \left(-\frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) = \left(\Delta r\text{в}I'_{pqe} + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) < 0$.

С всички реални и фиктивни ефекти окончателното решение на втория случай с трите нетни факторни индекса $I_{pe} < 1$, $I_{qe} > 1$ и $I_{pqe} < 1$ е следното:

$$r\text{в}I'_{pe} \times rI'_{qe} \times r\text{в}I'_{pqe} = \left(1 - \frac{E_p}{P_0} - \frac{fE_p}{P_0}\right)\left(1 + \frac{E_q}{P_0} + \frac{fE_q}{P_0}\right)\left(1 - \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} - \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}\right) = I_0.$$

От това решение **отпадат** фиктивните ефекти и **остават** само реалните от предходния адитивен факторен анализ:

$$r\text{в}I'_{pe} \times rI'_{qe} \times \ r\text{в}I'_{pqe} = 1 - \frac{E_p}{P_0} + \frac{E_q}{P_0} - \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} = I_0 \ \text{(Христов, 2016а).}$$

Другите два случая с трите сумарни ефекта, единият от които е положителен ефект, са третият и шестият от общо шестте случая на ефектите от разнопосочните факторни промени. Индексният факторен анализ на продукцията в тези случаи се решава също както втория случай с метода на реципрочните индекси. По-конкретно, **третият случай** е с трите сумарни ефекта $\text{E}_p > 0$, $\text{E}_q < 0$ и $\text{E}_{pq} < 0$, с които се съставят трите **нетни** факторни индекса $I_{pe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0}\right) > 1$, $I_{qe} = \left(1 - \frac{E_q}{P_0}\right) < 1$ и $I_{pqe} = \left(1 - \frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) < 1$. Ако с тези нетни факторни индекси не се изпълнява индексното равенство, защото $I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe} < I_0$, се преминава към решението с метода на реципрочните индекси. Най-напред се намира решението на **обратния случай** с трите нетни факторни индекса $I'_{pe} = \left(1 - \frac{E_p}{P_0}\right) < 1$, $I'_{qe} = \left(1 + \frac{E_q}{P_0}\right) > 1$ и $I'_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) > 1$, където P_0 е обемът на продукцията P_1 от отчетната година на третия случай. Тъй като за този обратен случай има само един нетен факторен индекс с отрицателен ефект $I'_{pe} = \left(1 - \frac{E_p}{P_0}\right) < 1$, неговото решение е с метода на квадратното уравнение. С този метод се определят двата брутни факторни индекса $\text{в}I'_{qe} > 1$ и $\text{в}I'_{pqe} > 1$ чрез тяхното произведение $\text{в}I'_{qe} \times \text{в}I'_{pqe} = \frac{I'_0}{I'_{\text{pe}}}$. При $I'_{qe} > I'_{pqe}$ решението на това уравнение е $\text{в}I'_{qe} \times \text{в}I'_{pqe} = \left(I'_{qe} + \frac{E_q}{E_{\text{pq}}} x\right)\left(I'_{pqe} + x\right) = \frac{I'_0}{I'_{\text{pe}}}$. С него се намират двата брутни индекса $\text{в}I'_{qe} = \left(1 + \frac{E_q}{P_0} + \frac{fE_q}{P_0}\right)$ и $\text{в}I'_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} + \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}\right)$, където $\frac{fE_q}{P_0}$ и $\frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}$ са двата фиктивни положителни ефекта. За обратния случай те нямат познавателно значение и поради това не са обект на анализ. Заедно с нетния факторен индекс с отрицателния ефект $I'_{pe} = \left(1 - \frac{E_p}{P_0}\right) < 1$ и двата брутни факторни индекса $\text{в}I'_{qe} > 1$ и $\text{в}I'_{pqe} > 1$ решението на обратния случай е $I'_{pe} \times \text{в}I'_{qe} \times \text{в}I'_{pqe} = I'_0$.

По-нататък се намират **реципрочните индекси** на получените факторни индекси от решението на обратния случай: $rI'_{pe} = \frac{1}{I'_{pe}}$, $r\text{в}I'_{qe} = \frac{1}{\text{в}I'_{qe}}$ и $r\text{в}I'_{pqe} = \frac{1}{\text{в}I'_{pqe}}$. С тези реципрочни индекси се намира търсеното решение на третия случай с трите нетни факторни индекса $I_{pe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0}\right) > 1$, $I_{qe} = \left(1 - \frac{E_q}{P_0}\right) < 1$ и $I_{pqe} = \left(1 - \frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) < 1$, защото

$rI'_{pe} \times r\text{в}I'_{qe} \times r\text{в}I'_{pqe} = I_0$, където I_0 е резултативният индекс на продукцията в третия случай.

От увеличението на реципрочния нетен факторен индекс $\Delta rI'_{pe} = (rI'_{pe} - 1) > 0$ и намаленията на двата реципрочни брутни индекса $\Delta r\text{в}I'_{qe} = (r\text{в}I'_{qe} - 1) < 0$ и $\Delta r\text{в}I'_{pqe} = (r\text{в}I'_{pqe} - 1) < 0$ се намират необходимите фиктивни ефекти за третия случай. По-конкретно, от $\Delta rI'_{pe} = (rI'_{pe} - 1) > 0$, $\Delta r\text{в}I'_{qe} = (r\text{в}I'_{qe} - 1) < 0$ и $\Delta r\text{в}I'_{pqe} = (r\text{в}I'_{pqe} - 1) < 0$ фиктивните ефекти се определят както при втория случай:

$\Delta rI'_{pe} = \frac{E_p}{P_0} + \frac{fE_p}{P_0}$, откъдето $\frac{fE_p}{P_0} = \frac{E_p}{P_0} + \frac{fE_p}{P_0} - \frac{E_p}{P_0} = \left(\Delta rI'_{pe} - \frac{E_p}{P_0}\right) > 0,$

$\Delta r\text{в}I'_{qe} = -\frac{E_q}{P_0} - \frac{fE_q}{P_0}$, откъдето $-\frac{fE_q}{P_0} = -\frac{E_q}{P_0} - \frac{fE_q}{P_0} - \left(-\frac{E_q}{P_0}\right) = \left(\Delta r\text{в}I'_{qe} + \frac{E_q}{P_0}\right) < 0,$

$\Delta r\text{в}I'_{pqe} = -\frac{E_{\text{pq}}}{P_0} - \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}$, откъдето $-\frac{fE_{\text{pq}}}{P_0} = -\frac{E_{\text{pq}}}{P_0} - \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0} - \left(-\frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) = \left(\Delta r\text{в}I'_{pqe} + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) < 0.$

С всички реални и фиктивни ефекти окончателното решение на третия случай с трите нетни факторни индекса е:

$$rI'_{pe} \times r\text{в}I'_{qe} \times r\text{в}I'_{pqe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0} + \frac{fE_p}{P_0}\right)\left(1 - \frac{E_q}{P_0} - \frac{fE_q}{P_0}\right)\left(1 - \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} - \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}\right) = I_0.$$

От това решение **отпадат** фиктивните ефекти и **остават** само реалните от предходния адитивен факторен анализ:

$$rI'_{pe} \times r\text{в}I'_{qe} \times r\text{в}I'_{pqe} = 1 + \frac{E_p}{P_0} - \frac{E_q}{P_0} - \frac{E_{pq}}{P_0} = I_0$$ (Христов, 2016а).

Последният (шести) случай от разнопосочните факторни промени е със сумарните ефекти $\text{E}_p < 0$, $\text{E}_q < 0$ и $\text{E}_{pq} > 0$. Неговото решение е аналогично на решението на предходните два (втори и трети) случая. С посочените сумарни ефекти се съставят трите **нетни** факторни индекса $I_{pe} = \left(1 - \frac{E_p}{P_0}\right) < 1$, $I_{qe} = \left(1 - \frac{E_q}{P_0}\right) < 1$ и $I_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) > 1$. Ако произведението на тези факторни индекси не изпълнява индексното равенство, защото $I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe} < I_0$, се преминава към решението на обратния случай с метода на реципрочните индекси. Най-напред се съставят нетните факторни индекси за обратния случай, $I'_{pe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0}\right) > 1$, $I'_{qe} = \left(1 + \frac{E_q}{P_0}\right) > 1$ и $I'_{pqe} = \left(1 - \frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) < 1$, където P_0 е обемът на продукцията P_1 от отчетната година на шестия случай. С квадратното уравнение се намират двата брутни факторни индекса $\text{в}I'_{pe} > 1$ и $\text{в}I'_{qe} > 1$ чрез тяхното произведение $\text{в}I'_{pe} \times \text{в}I'_{qe} = \frac{I'_0}{I'_{pqe}}$. При $I'_{pe} > I'_{qe}$ решението на това уравнение е $\text{в}I'_{pe} \times \text{в}I'_{qe} = \left(I'_{pe} + \frac{E_p}{E_q}x\right) \times \left(I'_{qe} + x\right) = \frac{I'_0}{I'_{pqe}}$ и обратно, ако $I'_{pe} < I'_{qe}$, уравнението е $\left(I'_{\text{p}e} + x\right) \times \left(I'_{qe} + \frac{E_q}{E_p}x\right) = \frac{I'_0}{I'_{pqe}}$. С първото уравнение се получават брутните факторни индекси $\text{в}I'_{pe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0} + \frac{fE_p}{P_0}\right)$ и $\text{в}I'_{qe} = \left(1 + \frac{E_q}{P_0} + \frac{fE_q}{P_0}\right)$, където $\frac{fE_p}{P_0}$ и $\frac{fE_q}{P_0}$ са двата фиктивни положителни ефекта. За обратния случай обаче те не са обект на анализ. Заедно с нетния факторен индекс с отрицателния ефект $I'_{pqe} = \left(1 - \frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) < 1$ и двата брутни факторни индекса $\text{в}I'_{pe} > 1$ и $\text{в}I'_{qe} > 1$ решението на обратния случай е $\text{в}I'_{pe} \times \text{в}I'_{qe} \times I'_{pqe} = I'_0$.

На следващ етап се намират **реципрочните индекси** на получените факторни от обратния случай: $r\text{в}I'_{pe} = \frac{1}{\text{в}I'_{pe}}$, $r\text{в}I'_{qe} = \frac{1}{\text{в}I'_{qe}}$ и $rI'_{pqe} = \frac{1}{I'_{pqe}}$. С тези реципрочни индекси се намира търсеното решение на последния шести случай на разнопосочните факторни промени с трите нетни факторни индекса $I_{pe} = \left(1 - \frac{E_p}{P_0}\right) < 1$, $I_{qe} = \left(1 - \frac{E_q}{P_0}\right) < 1$ и $I_{pqe} = \left(1 + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) > 1$: $r\text{в}I'_{pe} \times r\text{в}I'_{qe} \times rI'_{pqe} = I_0$, където I_0 е резултативният индекс за продукцията на шестия случай, $r\text{в}I'_{pe} < 1$ и $r\text{в}I'_{qe} < 1$, докато $rI'_{pqe} > 1$.

От намаленията на двата реципрочни брутни индекса $\Delta r\text{в}I'_{pe} = \left(r\text{в}I'_{pe} - 1\right) < 0$ и $\Delta r\text{в}I'_{qe} = \left(r\text{в}I'_{qe} - 1\right) < 0$, както и от увеличението на нетния факторен индекс $\Delta rI'_{pqe} = \left(rI'_{pqe} - 1\right) > 0$, се намират необходимите фиктивни ефекти за шестия случай. Те са, както следва:

$\Delta r\text{в}I'_{pe} = -\frac{E_p}{P_0} - \frac{fE_p}{P_0}$, откъдето $-\frac{fE_p}{P_0} = -\frac{E_p}{P_0} - \frac{fE_p}{P_0} - \left(-\frac{E_p}{P_0}\right) = \left(\Delta r\text{в}I'_{pe} + \frac{E_p}{P_0}\right) < 0$

$\Delta r\text{в}I'_{qe} = -\frac{E_q}{P_0} - \frac{fE_q}{P_0}$, откъдето $-\frac{fE_q}{P_0} = -\frac{E_q}{P_0} - \frac{fE_q}{P_0} - \left(-\frac{E_q}{P_0}\right) = \left(\Delta r\text{в}I'_{qe} + \frac{E_q}{P_0}\right) < 0$

и $\Delta rI'_{pqe} = \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} + \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}$, откъдето $\frac{fE_{\text{pq}}}{P_0} = \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} + \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0} - \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} = \left(\Delta rI'_{pqe} - \frac{E_{\text{pq}}}{P_0}\right) > 0$.

С всички реални и фиктивни ефекти окончателното решение на шестия случай с нетните факторни индекси $I_{pe} < 1$, $I_{qe} < 1$ и $I_{pqe} > 1$ е следното:

$$r\text{в}I'_{pe} \times r\text{в}I'_{qe} \times rI'_{pqe} = \left(1 - \frac{E_p}{P_0} - \frac{fE_p}{P_0}\right)\left(1 - \frac{E_q}{P_0} - \frac{fE_q}{P_0}\right)\left(1 + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} + \frac{fE_{\text{pq}}}{P_0}\right) = I_0.$$

От това решение **отпадат** фиктивните ефекти и **остават** само реалните от предходния адитивен анализ:

$r\text{в}I'_{pe} \times r\text{в}I'_{qe} \times rI'_{pqe} = 1 - \frac{E_p}{P_0} - \frac{E_q}{P_0} + \frac{E_{\text{pq}}}{P_0} = I_0$ (Христов, 2016а).

В заключение, както е забелязал внимателният читател, индексният факторен анализ на продукцията от разнородните съвкупности на стоките е **най-труден** за последните три случая със сумарните ефекти от разнопосочните факторни промени.

Останалите два случая (седмият и осмият) са с трите сумарни ефекта E_p, E_q и E_{pq} от еднопосочните факторни промени. Първият от тях е с трите **положителни** сумарни ефекта от едновременните увеличения на двата фактора, докато вторият случай е с трите **отрицателни** сумарни ефекта от едновременните намаления на факторите:

$$7.\ \mathrm{E}_p > 0,\ \mathrm{E}_q > 0 \text{ и } \mathrm{E}_{pq} > 0$$

$$8.\ \mathrm{E}_p < 0,\ \mathrm{E}_q < 0 \text{ и } \mathrm{E}_{pq} < 0.$$

С тези сумарни ефекти трите **нетни** факторни индекса **никога** не изпълняват индексното равенство, защото **винаги** тяхното произведение е $I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe} \neq I_0$.

Според предлаганата методика най-напред се търси решението на **седмия случай** с трите положителни сумарни ефекта $\mathrm{E}_p > 0$, $\mathrm{E}_q > 0$ и $\mathrm{E}_{pq} > 0$. То се извършва с метода на квадратното уравнение, с което се определят също два **брутни** факторни индекса: $\text{в}I_{pe} = 1 + \frac{E_p}{P_0} + \frac{E_{pqp}}{P_0}$ и $\text{в}I_{qe} = 1 + \frac{E_q}{P_0} + \frac{E_{pqq}}{P_0}$. За разлика от **фиктивните** положителни ефекти $\frac{fE_p}{P_0} > 0$ и $\frac{fE_q}{P_0} > 0$ в предходните случаи с разнопосочните факторни промени обаче двата допълнителни съвместни ефекта $\frac{E_{pqp}}{P_0}$ и $\frac{E_{pqq}}{P_0}$ са **винаги реални** положителни величини. Те се получават **също** с подобно квадратно уравнение, което **замества** индексното равенство само с двата брутни индекса $\text{в}I_{pe} \times \text{в}I_{qe} = I_0$. При $I_{pe} > I_{qe}$ видът на квадратното уравнение е $\left(I_{pe} + \frac{E_p}{E_q}x\right)\left(I_{qe} + x\right) = I_0$, където x е по-малкият реален съвместен ефект $\frac{E_{pqq}}{P_0}$, който се добавя към по-малкия нетен индекс I_{qe}. Ако $I_{pe} < I_{qe}$, x се добавя към I_{pe}. Решението с брутните индекси е $I_0 = \text{в}I_{pe} \times \text{в}I_{qe} = \left(1 + \Delta\text{в}I_{pe}\right)\left(1 + \Delta\text{в}I_{qe}\right) = 1 + \Delta\text{в}I_{pe} + \Delta\text{в}I_{qe} + \Delta\text{в}I_{pe} \times \Delta\text{в}I_{qe}$, където $\Delta\text{в}I_{pe} = \text{в}I_{pe} - 1 = \frac{E_p}{P_0} + \frac{E_{pqp}}{P_0}$ и $\Delta\text{в}I_{qe} = \text{в}I_{qe} - 1 = \frac{E_q}{P_0} + \frac{E_{pqq}}{P_0}$.

Окончателното решение с всички реални нетни и съвместни ефекти в двата брутни индекса е:

$$\text{в}I_{pe} \times \text{в}I_{qe} = \left(1 + \frac{E_p}{P_0} + \frac{E_{pqp}}{P_0}\right)\left(1 + \frac{E_q}{P_0} + \frac{E_{pqq}}{P_0}\right) = 1 + \frac{E_p}{P_0} + \frac{E_{pqp}}{P_0} +$$

$$\frac{E_q}{P_0}+\frac{E_{pqq}}{P_0}+\left(\frac{E_p}{P_0}+\frac{E_{pqp}}{P_0}\right)\left(\frac{E_q}{P_0}+\frac{E_{pqq}}{P_0}\right)=1+\frac{E_p}{P_0}+\frac{E_q}{P_0}+\frac{E_{pq}}{P_0}=I_0.$$

От това решение се получават **същите ефекти** както от предходния адитивен факторен анализ (Христов, 2016а).

Следващото и последно решение е на **осмия случай** с трите сумарни отрицателни ефекта $E_p<0$, $E_q<0$ и $E_{pq}<0$ от едновременните намаления на двата фактора. Този случай също е един от **най-трудните** на индексния факторен анализ на продукцията от разнородни съвкупности на стоките. По тази причина за неговото решение предлагам да се използва също **методът на реципрочните индекси** на двата брутни факторни индекса вI_{pe}и вI_{qe} от предходния седми случай с трите положителни сумарни ефекта $E_p>0$, $E_q>0$ и $E_{pq}>0$. Следователно най-напред трябва да се реши **обратният случай** с квадратното уравнение за двата брутни факторни индекса вI_{pe}и вI_{qe} и след това решението на последния (осми) случай с отрицателните сумарни ефекти $E_p<0$, $E_q<0$ и $E_{pq}<0$ е с **реципрочните** брутни индекси $r\text{в}I_{pe}=\frac{1}{\text{в}I_{pe}}$ и $r\text{в}I_{qe}=\frac{1}{\text{в}I_{qe}}$.

Последната процедура е за определяне на отрицателните съвместни ефекти $\frac{E_{pqp}}{P_0}<0$ и $\frac{E_{pqq}}{P_0}<0$ в намаленията на двата реципрочни брутни факторни индекса $\Delta r\text{в}I'_{pe}=\left(r\text{в}I'_{pe}-1\right)<0$ и $\Delta r\text{в}I'_{qe}=\left(r\text{в}I'_{qe}-1\right)<0$. По конкретно,

$$\Delta r\text{в}I'_{pe}=-\frac{E_p}{P_0}-\frac{E_{pqp}}{P_0},\text{ откъдето }-\frac{E_{pqp}}{P_0}=-\frac{E_p}{P_0}-\frac{E_{pqp}}{P_0}-\left(-\frac{E_p}{P_0}\right)=\left(\Delta r\text{в}I'_{pe}+\frac{E_p}{P_0}\right)<0$$

$$\Delta r\text{в}I'_{qe}=-\frac{E_q}{P_0}-\frac{E_{pqq}}{P_0},\text{ откъдето }-\frac{E_{pqq}}{P_0}=-\frac{E_q}{P_0}-\frac{E_{pqq}}{P_0}-\left(-\frac{E_q}{P_0}\right)=\left(\Delta r\text{в}I'_{qe}+\frac{E_q}{P_0}\right)<0.$$

Окончателното решение на осмия случай с всички реални и съвместни ефекти е:

$$r\text{в}I'_{pe}\times r\text{в}I'_{qe}=\left(1-\frac{E_p}{P_0}-\frac{E_{pqp}}{P_0}\right)\left(1-\frac{E_q}{P_0}-\frac{E_{pqq}}{P_0}\right)=1-\frac{E_p}{P_0}-\frac{E_q}{P_0}-\frac{E_{pq}}{P_0}=I_0.$$

От това решение се получават **същите ефекти** както от предходния адитивен факторен анализ (Христов, 2016а).

Заключение

Представена е методика за най-трудния и сложен индексен факторен анализ на изменението на продукцията от разнородни съвкупности на стоки според промените на цените и натуралните количества на отделните различни стоки. Тя се основава на авторовите методики за адитивен и индексен факторен анализ на продукцията на отделната стока и на продукцията на еднородните съвкупности на стоките, които са изложени в три предходни публикации в списанието (Христов, 2015, 2016а, 2016б). В този смисъл настоящата методика представлява по-нататъшно развитие и **обобщение** на посочените методики. Като обобщение тя е **универсална** за всички видове дискретни факторни анализи (адитивен и индексен) на **обемни резултативни величини** както продукцията от всякакви съвкупности (еднородни и разнородни) според промените на **интензивни показатели** като цените и на **екстензивни показатели** на статистическите единици като натуралните количества на отделните стоки.

Поради ограниченост на изложението с методиката не са решени примери. Интересуващият се читател може да намери такива, които са едни и същи в трите посочени публикации на автора (Христов, 2015, 2016а, 2016б). За сметка на примерите изложението на методиката за този наистина труден анализ е достатъчно подробно. От нейното сравнение с подобни методики за индексен факторен анализ на продукцията от други автори и източници се установяват няколко принципни и съществени различия. **Първото** е, че тя започва с анализ на продукцията на **всяка отделна стока.** По този начин се преодолява разнородността на стоките, която е един много труден и често непреодолим проблем на другите методики.

Второто принципно различие е, че винаги се започва с **адитивен факторен анализ** на продукцията на отделната стока, ефектите от който се измерват с дискретната функция на математическия сигнум (Христов, 2015). С тази функция всеки ефект от даден фактор се получава като произведение на неговата промяна с **по-малката стойност на другия фактор** от базисната или от отчетната година. От еднопосочните факторни промени (едновременни увеличения или намаления на двата фактора) се получават три ефекта - два нетни и съвместен ефект с еднакви положителни или отрицателни алгебрични знаци. От разнопосочните факторни промени (единият фактор се е увеличил, а другият е намалял) възникват **само** двата нетни ефекта с различни знаци, **без съвместен ефект.** За разлика от това строго логично и математически точно правило промяната на всеки фактор в икономическото образование и обществените науки се умножава по **усмотрение на анализатора** със стойността на другия фактор или **само** от базисната година, или **само** от отчетната година. По този начин, ако не за всички стоки, за някои от тях се получават **неверни ефекти** от всички видове факторни промени. Например от разнопосочните факторни промени се появяват **два брутни сбъркани ефекта** вместо двата верни нетни ефекта. Единият от брутните ефекти съдържа верния положителен нетен ефект и един фиктивен (несъществуващ) съвместен ефект също с положителен знак. Другият брутен ефект съдържа верния отрицателен нетен ефект и същия по размер фиктивен съвместен ефект, но с отрицателен знак. Сумата на двата брутни ефекта е равна точно на прираста или намалението на продукцията на стоката, защото двата фиктивни ефекта са равни по абсолютна стойност и с различните алгебрични знаци взаимно се анулират. Фиктивните ефекти обаче означават **допълнително увеличение на продукцията** през отчетната година от положителния съвместен ефект и **едновременно допълнително намаление на продукцията** през същата отчетна година от отрицателния съвместен ефект! Очевидно пълни безсмислици. За съжаление, тази объркаoст на адитивния факторен анализ преминава и в следващия индексен факторен анализ. По-конкретно, при **едновременните намаления** на двата фактора не се отчита, че всеки факторен индекс, който е по-малък от 1, съдържа **верния** нетен отрицателен ефект и **верния** отрицателен съвместен ефект от адитивния факторен анализ (Христов, 2015, 2016б). При разнопосочните промени също не се отчита, че единият факторен индекс, който е по-голям от 1, съдържа положителния верен **нетен** ефект от адитивния факторен анализ и един също положителен **фиктивен** (несъществуващ) ефект, който няма нищо общо с адитивния анализ (Христов, 2015, 2016а). Той произлиза от **независимостта** на факторните индекси, защото всеки от тях представлява отношение между отчетната и базисната стойност на единия фактор, ко-   ето е напълно **независимо** от отношението (индекса) на отчетната и базисната стойност на другия фактор. По този начин при разнопосочните факторни промени всеки факторен индекс, който е по-голям от 1, е **брутен,** защото съдържа необходим фиктивен положителен ефект, който е пълна безсмислица при адитивния факторен анализ. Фиктивният положителен ефект в брутния факторен индекс обаче е **необходим,** защото произведението на брутния факторен индекс и другия факторен индекс, който е по-малък от 1, е **точно равно** на резултативния индекс на продукцията. От това произведение **отпада** фиктивният ефект и **остават** само двата реални нетни ефекта от предходния адитивен факторен анализ. Тази необходимост на фиктивния ефект в определени факторни индекси е всъщност парадоксалният нерешен проблем на индексната теория от началото на миналия век до днес. Следователно при адитивния анализ няма никакви фиктивни ефекти, докато при индексния анализ всички факторни индекси по-големи от 1 имат такива ефекти. От своя страна, другият факторен индекс, който е по-малък от 1 поради намалението на фактора, е **винаги нетен,** защото съдържа **само** нетния отрицателен ефект без какъвто и да е фиктивен ефект. По тази причина при разнопосочните факторни промени той е **единственият верен и точен факторен индекс във всички индексни анализи,** защото нетният ефект или относителното (процентно) намаление на продукцията от този индекс е **точно равен** на относителното (процентно) намаление на индекса (Христов, 2015, 2016б). Тези особености на факторните индекси при разнопосочните факторни промени са **третото** принципно различие на предлаганата методика за индексен факторен анализ в сравнение с другите методики за този анализ.

От необходимостта на всички брутни индекси произлиза **необходимостта** от индексния факторен анализ, защото тези факторни индекси също като нетните факторни индекси измерват **точната относителна промяна** на всеки фактор. За разлика от индексния анализ с адитивния факторен анализ се измерват **точните относителни промени** на дискретната зависима променлива (относителните ефекти) от факторните промени. С брутните индекси факторните промени в двата анализа са **различни,** но резултатите (ефектите) са **еднакви**, откъдето произлиза и голямото познавателно значение на индексния факторен анализ.

Четвъртото принципно различие е, че получените ефекти от адитивния факторен анализ на продукцията на всяка отделна стока се **сумират** по отделни видове за всички стоки на разнородната съвкупност. Така се получават три вида сумарни ефекти: E_p - само от **преобладаващите** положителни или отрицателни ефекти от промените на цените на стоките, E_q - само от **преобладаващите** положителни или отрицателни ефекти от промените на натуралните количества, и E_{pq} - само от **преобладаващите** положителни или отрицателни съвместни ефекти. Сумата на тези сумарни ефекти е точно равна на прираста или намалението на продукцията. Със сумарните ефекти са възможни всичко **осем** различни решения, всяко от които съдържа трите сумарни ефекта с различни или еднакви знаци.

Три от осемте решения са с два положителни ефекта и един отрицателен:

$E_p > 0$, $E_q < 0$ и $E_{pq} > 0$; $E_p < 0$, $E_q > 0$ и $E_{pq} > 0$; $E_p > 0$, $E_q > 0$ и $E_{pq} < 0$.

Другите три решения са с два отрицателни ефекта и един положителен:

$E_p < 0$, $E_q > 0$ и $E_{pq} < 0$; $E_p > 0$, $E_q < 0$ и $E_{pq} < 0$; $E_p < 0$, $E_q < 0$ и $E_{pq} > 0$.

Останалите две решения са с трите положителни ефекта $E_p > 0$, $E_q > 0$ и $E_{pq} > 0$ и с трите отрицателни ефекта $E_p < 0$, $E_q < 0$ и $E_{pq} < 0$.

Първите шест решения са от разнопосочни факторни промени, докато последните две са от еднопосочни факторни промени.

Петото принципно различие на методиката е, че за разлика от всички други методики факторните индекси се съставят с относителните сумарни ефекти спрямо базисния обем на продукцията $\frac{E_p}{P_0}, \frac{E_q}{P_0}$ и $\frac{E_{pq}}{P_0}$. С тях най-напред се образуват три **нетни** факторни индекса I_{pe}, I_{qe} и I_{pqe}. С тяхното произведение се проверява индексното равенство $I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe} = I_0$. Ако то е изпълнено, решението е с трите нетни индекса. Ако то не е изпълнено както при първите шест случая със сумарните ефекти от разнопосочните факторни промени, защото $I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe} < I_0$, решението е на всеки отделен случай.

Шестото принципно различие на методиката с другите методики за индексен факторен анализ е, че за решенията на отделните случаи с различните сумарни ефекти са предложени **два метода - на квадратното уравнение и на реципрочните индекси.**

Най-лесни са решенията на първите три случая, всеки от които е **с два положителни ефекта и един отрицателен.** Решението на всеки от трите случая се опростява с наличието на нетния факторен индекс, който е по-малък от 1, с отрицателния ефект. За да се изпълни индексното равенство с другите два нетни факторни индекса, които са по-големи от 1, те се **увеличават** с два фиктивни положителни ефекта. Тъй като тези ефекти трябва да са пропорционални на двата нетни положителни ефекта, е предложен **методът на квадратното уравнение** за тяхното точно определяне. В това уравнение неизвестното x е за по-малкия фиктивен ефект, който се добавя към по-малкия факторен индекс. В резултат на посочените увеличения с фиктивните ефекти двата нетни факторни индекса се превръщат в **два брутни факторни индекса,** всеки от които съдържа нетния положителен ефект и фиктивен положителен ефект. С двата брутни индекса и нетния факторен индекс, който е по-малък от 1, се изпълнява индексното равенство. От решението **отпадат** двата фиктивни ефекта и **остават** само реалните сумарни ефекти от предходния адитивен факторен анализ.

Най-трудни за решаване са следващите три случая, всеки от които е **с един положителен ефект и два отрицателни.** За тях засега няма пряко решение както за предходните три случая. По тази причина е предложен **методът на реципрочните индекси,** с който всеки един случай с един положителен ефект и два отрицателни се превръща със същите данни в неговия **обратен случай** с два положителни ефекта и един отрицателен ефект. За това превръщане се използват свойствата на всеки **два взаимообратими случая** с едни и същи данни, но с разменени места на базисната и отчетната година. От адитивния факторен анализ на такива случаи се получават едни и същи ефекти по абсолютна стойност, но с обратни алгебрични знаци (Христов, 2015, 2016а). Най-напред се извършва индексен факторен анализ на обратния случай. Тъй като той е с нетния факторен индекс по-малък от 1, неговото решение е с **метода на квадратното уравнение** за намирането на двата брутни факторни индекса с положителните нетни и фиктивни ефекти. След това получените индекси от решението на обратния случай се превръщат в **реципрочните** за решението на случая с единия положителен ефект и двата отрицателни. Най-накрая от реципрочните индекси и реалните ефекти в тях се намират необходимите фиктивни ефекти. Те **отпадат** от решението на индексния анализ с реципрочните индекси и **остават** само реалните ефекти от предходния адитивен факторен анализ.

Последните два случая със сумарните ефекти са **от еднопосочни факторни промени.** Първият е с трите положителни сумарни ефекта $E_p > 0$, $E_q > 0$ и $E_{pq} > 0$. С тях трите нетни факторни индекса не изпълняват индексното равенство, защото $I_{pe} \times I_{qe} \times I_{pqe} > I_0$. Този случай се решава също с **метода на квадратното уравнение,** с което се определят **два реални съвместни ефекта.** Или за разлика от предходните случаи с разнопосочните факторни промени, при които допълнителните ефекти са **фиктивни,** тук се намират **два реални съвместни ефекта.** Те се прибавят към двата нетни факторни индекса I_{pe} и I_{qe} и ги превръщат в два **брутни** факторни индекса вI_{pe} и вI_{qe}. Неизвестното x в квадратното уравнение в$I_{pe} \times$ вI_{qe}=I_0 е за по-малкия нетен факторен индекс. От решението се получават **същите** три сумарни ефекта от предходния адитивен факторен анализ.

Последният случай с трите отрицателни ефекта $E_p < 0$, $E_q < 0$ и $E_{pq} < 0$ е също **много труден** за решаване. По тази причина той се решава също с **метода на реципрочните индекси.** Най-напред той се превръща в неговия **обратен случай,** който е с трите положителни ефекта. Обратният случай се решава с **метода на квадратното уравнение,** с което се намират двата брутни факторни индекса с двата положителни нетни и съвместни ефекта. От двата брутни факторни индекса се пресмятат **реципрочните факторни индекси,** с които се решава случаят с трите отрицателни сумарни ефекта. От решението се получават **същите** сумарни ефекти както от предходния адитивен факторен анализ.

В заключение, с изложената методика се намират всичките **осем** възможни еднозначни решения на индексния факторен анализ на продукцията от разнородните съвкупности на стоките. С нея се отхвърлят всички други методики у нас и в чужбина за този анализ на продукцията от разнородни съвкупности на стоките. В следващата статия ще бъде представен верният и точен адитивен факторен анализ с дискретната функция на математическия сигнум на средните равнища (средните цени) от еднородните съвкупности на стоките. Изменението на средните цени се анализира с промените на цените на отделните стоки и на **относителните дялове** на техните натурални количества. С промените на относителните дялове на екстензивни показатели се измерват ефектите от **структурните промени** на важни икономически, социални и демографски показатели, както и на всякакви други за еднородни статистически съвкупности.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА:

Гатев, К. (1995). Въведение в статистиката, Лиа, С.

Маркс, К. (1953). Капиталът, том I, Издателство на БКП, С.

Христов, Е. (1978). Прирастът на продукцията според промените във вложеното количество труд и производителността на труда, Статистика, кн. 5, С.

Христов, Е. (2015). Елементарният функционален адитивен и индексен факторен анализ и неговите еднозначни решения с дискретната нечетна функция на математическия сигнум, Статистика, кн. 1, С.

Христов, Е. (2016а). Адитивен факторен анализ на обема на продукцията на еднородни и разнородни съвкупности на стоки с дискретната нечетна функция на математическия сигнум, Статистика, кн. 1, С.

Христов, Е. (2016б). Индексен факторен анализ на обема на продукцията от еднородни съвкупности на стоки с дискретната нечетна функция на математическия сигнум, Статистика, кн. 2, С.

Цонев, В. (1984). Традиционный и новый алгоритм построения индексных формул, Научни трудове на Висшия икономически институт „Карл Маркс“, факултет „Икономическа информация“, том I, С.

Цонев, В. (1997). Теория на индексите и нейната статистическа алтернатива, Статистика, кн. 6, С.

Проф. Венец Цонев (2009). Моят път като статистик (1917 - 2008), Статистика, кн. 1 - 4, С.

Allen, R. (1975). Index Numbers in Theory and Practice. London: Macmillan.

Fisher, I. (1923). The Making of Index Numbers. London: Pitman and Sons.

Prof. Venetz Tzonev (2008). Elementary Index Number Theory as a Safe Foundation of a System of National Accounts, Statistics, № 4.

Systems of National Accounts 2008. Commission of the European Communities, International Monetary Fund, Organization of Economic Cooperation and Development, United Nation, World Bank.

The Oxford Paperback Dictionary 1994.