АДИТИВЕН ФАКТОРЕН АНАЛИЗ НА СРЕДНИТЕ ЦЕНИ ОТ ЕДНОРОДНИ СЪВКУПНОСТИ НА СТОКИ С ДИСКРЕТНАТА НЕЧЕТНА ФУНКЦИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ СИГНУМ

Емил Христов[*]

Въведение

В статията е представена **нова методика** за дискретен адитивен факторен анализ на средните цени на стоките в икономическата статистика. Такива цени има обаче само при еднородните статистически съвкупности на стоките. Статистическата съвкупност е основна категория в теорията на статистиката както множеството в теорията на множествата, но за разлика от множествата статистическите съвкупности в икономиката се разделят на **еднородни и разнородни съвкупности.** Тъй като те все още не са точно дефинирани в учебната и научната литература, се използват определенията на автора за еднородна и разнородна съвкупност (Христов, 2016а). Според тези определения под **еднородна съвкупност** се разбира крайно множество на **взаимозаменяеми стоки от един и същ вид** за задоволяването на някаква точно определена конкретна потребност. Такива стоки се различават само по **цени и натурални количества,** които са представени в **една и съща натурална мярка.** В математически смисъл еднородната съвкупност представлява **честотно разпределение** на елементите или единиците на едно крайно множество според значенията на една или повече характеристики (признаци). Когато не е изпълнено едното условие (единиците

[*] Професор, д.ик.н.; e-mail: emil_hristov_37@hotmail.com.

или елементите на множеството да са взаимозаменяеми) и/или не е изпълнено и второто условие (натуралното количество на единиците или елементите на множеството да са в една и съща натурална мярка), съвкупността е **разнородна.** По определение в икономиката тя е крайно множество от **разнородни стоки** или **подсъвкупности** на различни стоки, всяка от които е **еднородна съвкупност.** Определянето на една статистическа съвкупност обаче като еднородна или разнородна е най-напред **икономическа** и след това математическа задача. Причината е, че **видът на съвкупностите** се определя **предварително** и след това се съставя като еднородна или разнородна според някаква конкретна целесъобразност (Христов, 2016а, 2016б, 2017). Тъй като всяка отделна стока има индивидуална цена p и индивидуално количество q за една календарна година, за нея се предлага понятието **„елементарна съвкупност“** в икономическата статистика. С това понятие всяка еднородна съвкупност на стоки може да се определи като крайно множество на **елементарни съвкупности от един и същ вид,** докато всяка разнородна съвкупност е крайно множество на **различни елементарни съвкупности (стоки).** Възможно е една и съща стока (елементарна съвкупност) или група стоки от един и същ вид да участват по една целесъобразност в еднородна съвкупност, а по друга целесъобразност в разнородна съвкупност. Възможно е същата стока или група стоки да участват по различни целесъобразности в две различни еднородни или в две различни разнородни съвкупности. Посоченото различие между еднородните и разнородните съвкупности е фундаментално в икономическата статистика и е **гранична линия** между нея и приложната математика във всеки конкретен икономически анализ. Изводът от определенията на двата вида съвкупности, който може да се направи е, че само еднородната съвкупност на стоките има **икономически обоснована средна цена** $\bar{\mathrm{p}}$ от цените p_i на отделните стоки, както и **общо натурално количество на всички стоки Q** от натуралните количества q_i, които са в една и съща натурална мярка. Следователно обемът на продукцията P в паричен израз на всяка еднородна съвкупност стоки за една календарна година може да се изрази аналитично с двуфакторния мултипликативен модел $P = \bar{p} \times Q$, където стойностите на двата фактора $\bar{\mathrm{p}}$ и Q се получават с **агрегираните** данни за всички стоки от еднородната съвкупност, или $\bar{\mathrm{p}} = \frac{\sum p_i \times q_i}{Q}$, където $Q = \sum q_i$ (Христов, 2016а). Когато цената p_i на всяка i-та отделна стока не е постоянна през цялата календарна година, точната стойност трябва да се определя като претеглена средна хронологична. С посочения модел се извършва адитивен факторен анализ на изменението в обема на продукцията $\Delta \mathrm{P} = \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0$ за всяка отчетна спрямо друга (базисна) година. Разликата $\Delta \mathrm{P}$ се обяснява с разликите на средните цени $\Delta \bar{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0$ и на общите натурални количества на стоките $\Delta Q = Q_1 - Q_0$. Цялостната методика за този адитивен анализ на **продукцията** с агрегираните данни за $\bar{\mathrm{p}}$ и Q на стоките е изложена в моя предходна статия в списанието (Христов, 2016а). С нея се установяват **три ефекта** (два нетни - само от промяната на $\bar{\mathrm{p}}$ и от промяната на Q) и един съвместен ефект от еднопосочните едновременни увеличения или намаления на двата фактора, както и само **два нетни ефекта** от разнопосочните промени на тези фактори, **без съвместни ефекти.** Всички ефекти се получават с дискретната нечетна функция на математическия сигнум. Освен с **агрегираната информация** за средната цена $\bar{\mathrm{p}}$ и общото натурално количество Q за всички стоки от еднородна съвкупност, разликата в обемите на продукцията $\Delta \mathrm{P} = \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0$ може да се анализира и с **неагрегирана информация** за цените p_i и натуралните количества q_i на **отделните стоки.** Същата неагрегирана информация се отнася както за обема на продукцията от еднородни съвкупности, така и от разнородни съвкупности. За адитивния факторен анализ няма никакво значение **видът на съвкупността** (еднородна или разнородна), ако той се извършва по **отделни стоки.** Следователно методиките и съответните методи за адитивния факторен анализ на продукцията от съвкупности на стоки зависят не само от **вида на съвкупностите -** еднородна или разнородна, но и от **вида на информацията -** агрегирана или неагрегирана. Адитивният факторен анализ на изменението на продукцията $\Delta \mathrm{P} = \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0$ се извършва с агрегираната информация **само** с разликите на средните цени $\Delta \bar{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0$ и на общите натурални количества на стоките $\Delta Q = Q_1 - Q_0$ **общо за всички стоки от сравняваните еднородни съвкупности.** Същата разлика на продукцията $\Delta \mathrm{P} = \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0$ може да се анализира и с **неагрегирана информация** с разликите $\Delta p_i = p_{i1} - p_{i0}$ и на натуралните количества $\Delta q_i = q_{i1} - q_{i0}$ за **отделните стоки на същите еднородни съвкупности** (Христов, 2016а). Двата адитивни факторни анализа на продукцията от еднородните съвкупности обаче са **различни.** Също за разлика от тези два анализа с еднородните съвкупности адитивният факторен анализ на продукцията от **разнородните съвкупности на стоки** може да се извършва **единствено и само с неагрегирана информация** с разликите на цените $\Delta p_i = p_{i1} - p_{i0}$ и на натуралните количества $\Delta q_i = q_{i1} - q_{i0}$ на **отделните различни стоки,** след като такива стоки не могат да имат икономически обоснована средна цена и общо натурално количество Q. Авторовата методика за адитивния факторен анализ на продукцията **само от разнородните съвкупности на стоките** е публикувана в посочената статия за адитивния факторен анализ на продукцията от еднородните съвкупности на стоките (Христов, 2016а). От своя страна, методиката за адитивния факторен анализ на продукцията на всяка отделна стока е публикувана в първата статия на автора за елементарния адитивен и индексен функционален анализ с дискретната нечетна функция на математическия сигнум (Христов, 2015). Освен посочените **две задължителни условия** за вида на статистическите съвкупности (еднородни или разнородни) и за вида на информацията (агрегирана или неагрегирана) има и още едно **препоръчително условие** само за неагрегираната информация на стоките. Тя може да бъде както с **групирани данни на стоките,** така и с **негрупираните данни за отделните стоки.** Във връзка с това е необходимо да се отбележи, че не е задължително разпределението или групирането на отделните стоки да бъде според величините на техните цени и натурални количества или по друг признак. Правилото е, че разпределението или групирането се определя от конкретната задача. В икономиката обаче, където се работи с парични средства, най-голямо значение за икономическия анализ има разпределението на стоките по цени и натурални количества. За съжаление, посочените съществени и важни условия за адитивния факторен анализ на продукцията от статистическите съвкупности на стоките липсват в икономическото образование по статистика.

Предлаганата методика в настоящата статия е също за адитивен факторен анализ, но само на промяната или разликата на средните цени $\Delta\overline{\mathrm{p}} = \overline{\mathrm{p}}_1 - \overline{\mathrm{p}}_0$. Този адитивен анализ може да бъде също с **неагрегирана информация** за отделните стоки, но само от **еднородни съвкупности на стоките,** защото само те имат **средни цени.** Следователно адитивният факторен анализ изпълнява и двете посочени условия. **Новата методика** за адитивен факторен анализ на средните цени представлява по-нататъшно развитие на предходната методика за адитивен анализ на продукцията с агрегираните данни за $\overline{\mathrm{p}}$ и Q на стоките и по тази причина в нея също се препоръчва групиране на стоките. За тази цел **натуралните количества на стоките $\boldsymbol{q_i}$ се превръщат в относителни дялове $\boldsymbol{\omega_i}$** спрямо тяхното общо натурално количество $Q = \sum q_i$ за всяка календарна година. Относителните дялове ω_i образуват **статистическата структура** на натуралните количества q_i , защото $\sum \omega_i = 1$. С относителните дялове $\omega_i = \frac{q_i}{Q}$ двуфакторният мултипликативен модел за продукцията $\mathrm{P} = \overline{\mathrm{p}} \times Q$ се превръща в трифакторен модел с групираните данни на стоките $P = \sum p_i \times \omega_i \times Q$. С този модел се изразява зависимостта на обема на продукцията P от трите фактора - цените p_i, относителните дялове ω_i на натуралните количества q_i и общото натурално количество на всички стоки Q. От него се извежда двуфакторният мултипликативен модел **само** за средната цена $\overline{\mathrm{p}} = \sum \mathrm{p}_i \times \omega_i$, от който следващият модел за адитивен факторен анализ на промяната на тази средна цена е $\Delta\bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_0 = \frac{\sum p_{i1 \times} q_{i1}}{Q_1} - \frac{\sum p_{i0 \times} q_{i0}}{Q_0} = \sum p_{i1} \times \omega_{i1} - \sum p_{i0} \times \omega_{i0}$.

Решението на този модел се извършва също с дискретната нечетна функция на математическия сигнум. **Новото** в предлаганата методика е, че в общия случай с **четирите вида промени** (еднопосочни и разнопосочни) на двата фактора p_i и ω_i могат да се получат с дискретната нечетна функция на математическия сигнум всичко **осем различни решения** със сумарни ефекти от **всички стоки.** Всяко от тях е с **три сумарни ефекта (два нетни** - само от промените на p_i и промените на ω_i) и **един съвместен ефект** от еднопосочните едновременни увеличения или намаления на двата фактора. Компетентният читател ще забележи още тук, че осемте решения се различават методологично от решенията на адитивния факторен анализ на средните равнища в икономическото образование и в приложните изследвания на обществените науки в БАН. В точка 3 на настоящата статия са разкрити причините за техните различия. Получените осем решения са **подобни** на осемте решения с **общата методика** за адитивен факторен анализ на обема на продукцията от еднородните и разнородните съвкупности на стоките само с данните за цените p_i и натуралните количества q_i на **отделните стоки** (Христов, 2017). Тези осем решения с p_i и q_i се обясняват с **независимостта на продукциите** на отделните стоки $P_{0i} = p_i \times q_i$, откъдето тяхната сума е равна на обема на продукцията от цялата съвкупност на стоките, независимо дали тя е еднородна, или разнородна, $\mathrm{P}_o = \sum P_{oi} = \sum p_i \times q_i$. По аналогичен начин и моделът за средната цена $\bar{\mathrm{p}} = \sum \mathrm{p}_i \times \omega_i$ с групираните данни на стоките се представя също като сума на **независимите величини** $\boldsymbol{p_i \times \omega_i}$**.** Именно поради тази независимост адитивният факторен анализ на $\Delta\bar{\mathrm{p}}$ се извършва за **всяка отделна стока** с дискретната нечетна функция на математическия сигнум. Получените ефекти от дадената факторна промяна представляват **приносите** на всяка i-та стока в тяхната сума на ефектите от всички стоки. По този начин за цялата еднородна съвкупност на стоките се съставят **три** алгебрични суми за трите различни ефекта. Отделно се сумират трите ефекта за всяка отделна стока. **Сумата** на трите отделни **сумарни ефекта** за всички стоки и **общата сума** на трите ефекта от всяка стока трябва да бъдат **равни** както помежду си, така и на разликата между двете средни цени $\Delta\bar{\mathrm{p}} = \bar{p}_1 - \bar{p}_0$. Получените решения се очаква да съдържат **в общия случай** с четирите вида промени на двата фактора p_i и ω_i **минимални съвместни ефекти** от еднопосочните увеличения или намаления на факторите в сравнение с нетните ефекти от **някои стоки,** защото останалите стоки в еднородната съвкупност с разнопосочните факторни промени са без каквито и да са съвместни ефекти.

Предлаганата методика за адитивен факторен анализ на средните цени с групираните данни за цените на стоките p_i и за относителните дялове ω_i на техните натурални количества q_i има своя отделна много важна цел, която е различна от задачите на другите методики за адитивен факторен анализ. Например за разлика от общата методика за влиянията на **промените на цените p_i и на натуралните количества q_i** на отделните стоки върху изменението на продукцията $\Delta P = P_1 - P_0 = \sum p_{i1}q_{i1} - \sum p_{i0}q_{i0}$, която е публикувана в моята предходна статия, тук адитивният факторен анализ е за влиянията също на **промените на цените p_i**, но не на промените на натуралните количества q_i, а **на техните относителни дялове ω_i** върху разликата на двете средни цени $\Delta\bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_0 = \sum p_{i1} \times \omega_{i1} - \sum p_{i0} \times \omega_{i0}$ (Христов, 2017). Това са **два различни анализа,** защото относителните дялове $\omega_i = \frac{q_i}{Q}$ зависят не само от натуралните количества q_i, но и от тяхната сума $\sum q_i = Q$. От тази зависимост разликите $\Delta\omega_i = \omega_{i1} - \omega_{i0}$ за някои стоки **не съответстват** по алгебричен знак и величина на разликите $\Delta q_i = q_{i1} - q_{i0}$. От адитивния факторен анализ на разликата $\Delta\bar{p}$ се получават **три** много важни сумарни ефекта от ефектите за отделните стоки (прирасти и/или намаления на базисната цена $\bar{p}_0$). Първият сумарен ефект е **ценовият** само от промените на цените p_i на отделните стоки, вторият сумарен ефект е **структурният** само от структурните промени на теглата q_i на стоките чрез разликите на техните относителни дялове ω_i, докато третият сумарен ефект е **съвместният** само от еднопосочните промени (едновременни увеличения или намаления) на двата фактора p_i и ω_i на отделните стоки. Поради това методиката за адитивния факторен анализ на разликата на средните цени $\Delta\bar{p}$ е **универсална** за решенията на всички задачи с този анализ на всякакви средни равнища. От трите сумарни ефекта специално значение има **общият структурен ефект** (в т.ч. нетният и неговата пропорционална част от съвместния ефект), който не може да се измери коректно по никакъв друг начин. Следователно методиката може да се прилага не само в икономиката, но и във всички други области на живота, където се извършват анализи с еднородни съвкупности. Във връзка с посочената универсалност на предлаганата методика за адитивния факторен анализ на средни равнища тя е можела да бъде изведена отдавна в демографската статистика не само с индуктивната обобщаваща логика на автора или със знаковата функция на математическия сигнум, но и с **теорията на вероятностите.** Демографската статистика е била включена след Втората световна война и като социална и икономическа за трудовите ресурси (работната сила) и за заетите в икономическото образование и обществените науки у нас. В аналитично отношение обаче тя е **пряко свързана** с теорията на вероятностите, от която могат да се изведат еднозначните решения на адитивния факторен анализ на всякакви средни равнища от еднородните статистически съвкупности. Защо това не е направено досега, е абсолютно необяснимо. Именно за нуждите на всички **неикономически статистики** е изложен в следващата точка 1 на настоящата статия адитивният факторен анализ с теорията на вероятностите. С него се анализира разликата на средни равнища (общите коефициенти за смъртност на населението за базисна и отчетна година) от промените на неговата смъртност по възраст и на относителните дялове на неговия средногодишен брой по възраст за двете сравнявани години.

1. Адитивен факторен анализ на средните цени на стоки от еднородни съвкупности и обобщение за средните равнища (показатели за интензивност) от всякакви еднородни статистически съвкупности

Една от най-разпространените практики на адитивния факторен анализ е на промяната на средната цена от промените на **групирани данни** на стоките според техните цени и натурални количества (честотни разпределения) за две сравнявани години (базисна и отчетна). Адитивен анализ може да се извърши и със същите, но **негрупирани данни** на стоките, защото с тях може също да се пресмята същата средна цена. Групираните данни обаче са много полезни и указателни за икономическия анализ и от анализатора зависи видът на групирането. Една от най-полезните групировки е по величина на цените на отделните стоки, но тя може да бъде и с други групи стоки по друг признак, който също зависи от решението на анализатора за броя на групите и за различния брой на стоките в отделните групи.

Изходната формула за средната цена $\overline{\mathrm{p}}$ от всички данни на стоките за техните цени $\mathrm{p_i}$ и натурални количества q_i (теглата) е $\overline{\mathrm{p}} = \frac{\sum p_i \times q_i}{\sum q_i} = \frac{\sum p_i \times q_i}{Q}$, където $\mathrm{Q} = \sum q_i$ е общото натурално количество на всички стоки в една и съща натурална мярка, ί е индексът (номерът) на всяка отделна стока 1, 2,..., n (Гатев, 1995).

Ако всички **n** стоки са групирани в по-малък брой **m** групи със своите групови цени $\overline{\mathrm{p}}_j$ и натурални количества q_j в отделните групи (еднородни съвкупности като подсъвкупности на разнородната съвкупност), могат за удобство на анализа да се направят заместванията $\overline{\mathrm{p}}_j = \mathrm{p_i}$ и $q_j = q_i$. Никога обаче не трябва да се забравя, че съответните i-та са за отделните **еднородни подсъвкупности на стоките** (Христов, 2017).

Решението на адитивния факторен анализ е на разликата на двете средни претеглени цени за базисната и отчетната година:

$$\Delta\bar{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0 = \frac{\sum p_{i1} \times q_{i1}}{Q_1} - \frac{\sum p_{i0} \times q_{i0}}{Q_0}.$$

С цел да се елиминира влиянието на промяната на **третия фактор** - общото натурално количество на стоките Q, вторият фактор - натуралните количества на отделните стоки q_i , се превръща в относителни дялове $\omega_i = \frac{q_i}{Q}$, с които се претеглят цените, или първият фактор. По този начин вторият фактор q_i се превръща в **структурен фактор $\boldsymbol{\omega_i}$**, откъдето двуфакторният модел на разликата на средните цени получава крайния израз с ω_i:

$$\Delta\bar{\mathrm{p}} = \frac{\sum p_{i1} \times q_{i1}}{\sum q_{i1}} - \frac{\sum p_{i0} \times q_{i0}}{\sum q_{i0}} = \frac{\sum p_{i1} \times q_{i1}}{Q_1} - \frac{\sum p_{i0} \times q_{i0}}{Q_0} = \sum p_{i1}\, \omega_{i1} - \sum p_{i0}\, \omega_{i0}.$$

В общия случай всяка стока се характеризира с един от следните **четири вида** факторни промени на цената $\mathrm{p_i}$ и относителния дял ω_i на натуралното количество q_i:

- едновременни увеличения на двата фактора $\Delta \mathrm{p}_i > 0$ и $\Delta\omega_i > 0$;
- едновременни намаления на двата фактора $\Delta \mathrm{p}_i < 0$ и $\Delta\omega_i < 0$;
- разнопосочни факторни промени (единият фактор се е увеличил, а другият е намалял) $\Delta \mathrm{p}_i > 0$ и $\Delta\omega_i < 0$ или $\Delta \mathrm{p}_i < 0$ и $\Delta\omega_i > 0$.

От тези четири възможни промени на двата фактора произлизат следните **ефекти от всяка *i*-та стока** с дискретната нечетна функция на математическия сигнум:

$\Delta p, \omega_i = \Delta p_i \times \omega_{imin}$ - **нетен ценови ефект** (прираст или намаление на средната базисна цена $\bar{\mathrm{p}}_0$) **само** от промяната (увеличението или намалението) на цената $\Delta p_i = p_{i1} - p_{i0}$, където ω_{imin} е **по-малкият относителен дял $\boldsymbol{\omega_i}$** на i-тата стока от базисната или от отчетната година;

$\Delta\omega, p_i = \Delta\omega_i \times p_{imin}$ - **нетен структурен ефект** (прираст или намаление на средната базисна цена $\bar{\mathrm{p}}_0$) **само** от промяната (увеличението или намалението) на относителния дял $\Delta\omega_i = \omega_{i1} - \omega_{i0}$, където p_{imin} е **по-малката цена** на i-тата стока от базисната или от отчетната година;

$h_i \Delta p_i \Delta \omega_i$ - **съвместен ефект** (прираст или намаление на средната базисна цена $\bar{\mathrm{p}}_0$) **само** от еднопосочни съвместни промени на цената Δp_i и на относителния дял $\Delta \omega_i$ на i-тата стока, където $h_i = +1, 0$ или -1 са трите дискретни стойности на нечетната фукция на математическия сигнум. С тях се определя **наличието** на съвместен ефект със съответния алгебричен знак или **отсъствието** на такъв ефект (Христов, 2015).

При едновременни увеличения на двата фактора $\Delta \mathrm{p}_i > 0$ и $\Delta \omega_i > 0$, $h_i = +1$, откъдето съвместният ефект е положителна величина $\Delta p_i \Delta \omega_i > 0$. При едновременни намаления на факторите $\Delta \mathrm{p}_i < 0$ и $\Delta \omega_i < 0$, $h_i = -1$, същият ефект е отрицателна величина $\Delta \mathrm{p}_i \Delta \omega_i < 0$, докато при разнопосочните факторни промени $\Delta \mathrm{p}_i > 0$ и $\Delta \omega_i < 0$ или $\Delta \mathrm{p}_i < 0$ и $\Delta \omega_i > 0$, $h_i = 0$, **няма** съвместни ефекти.

Обобщено, само от еднопосочните факторни промени има **три ефекта** (два нетни) и един съвместен с еднакви положителни или отрицателни алгебрични знаци, докато от разнопосочните факторни промени (единият фактор се е увеличил, а другият е намалял) има само **два нетни ефекта** с различни алгебрични знаци, **без съвместен ефект.**

Подобно на методиките за адитивен факторен анализ на обемните резултативни величини (продукцията) с дискретната функция на математическия сигнум и в настоящата методика за адитивен анализ на средните равнища (цени) факторните промени на всяка стока се отчитат според **концепцията за тяхната взаимозависимост** (The Oxford Paperback Dictionary, 1994). С тази концепция промяната на всеки фактор се **съобразява** с едновременната промяна на другия фактор. Всъщност това е „тайната“ на всеки верен адитивен факторен анализ, според която промените на всички фактори трябва да се отчитат **едновременно,** а не поотделно. Това строго логическо и математическо условие се изпълнява именно от дискретната нечетна функция на математическия сигнум. С нея всяка промяна на единия фактор трябва да се умножава с **по-малката стойност** на другия фактор. Ако всички промени на единия фактор се умножават със стойностите на другия фактор **само** от базисната година или **само** със стойностите от отчетната година, така както се предлага за адитивния факторен анализ във всички учебници и ръководства по теория на статистиката и за всички отраслови статистики, се получават **винаги неверни ефекти за една част на стоките,** а оттам и за цялата тяхна съвкупност! Тези неверни ефекти произлизат както от еднопосочните факторни промени, така и от разнопосочните. Те са показани като неверни в точка 3 на статията.

На следващ етап се сумират **отделно ефектите от всеки вид** (ценовите, структурните и съвместните) **за всички стоки** на еднородната съвкупност:

$$\sum \Delta p_i \omega_{imin} = \sum \Delta p, \omega_i = \Delta \overline{p}, p,$$
$$\sum \Delta \omega_i p_{imin} = \sum \Delta \omega, p_i = \Delta \overline{p}, \omega,$$
$$\sum h_i \, \Delta p_i \Delta \omega_i = \Delta \overline{p}, \mathrm{p}\omega.$$

Алгебричната сума на трите сумарни ефекта със своите алгебрични знаци е равна на разликата (прирастът или намалението) на средната цена:

$$\Delta \overline{p}, p + \Delta \overline{p}, \omega + \Delta \overline{p}, p\omega = \Delta \overline{p}.$$

Или обобщено, от адитивния факторен анализ на средните цени се получават в общия случай от четирите вида факторни промени **три отделни (независими) сумарни ефекта** с дискретната нечетна функция на математическия сигнум:

$-\Delta \overline{p}, p$ е **общият (сумарен) ценови ефект** (салдо) само от **преобладаваща сума** на положителни или отрицателни ценови ефекти $\Delta p, \omega_i$ от промените на цените на отделните стоки $\Delta p_i = p_{i1} - p_{i0}$;

$-\Delta \overline{p}, \omega$ е **общият (сумарен) структурен ефект** (салдо) само от **преобладаваща сума** на положителни или отрицателни структурни ефекти $\Delta \omega, p_i$ от промените на относителните дялове $\Delta \omega_i = \omega_{i1} - \omega_{i0}$ на натуралните количества на стоките; и

$-\Delta \overline{p}, p\omega$ е **общият (сумарен) съвместен ефект** (салдо) само от **преобладаваща сума** на положителни или отрицателни съвместни ефекти $h_i \Delta p_i \Delta \omega_i$ от **еднопосочни съвместни промени** на цените Δp_i и на относителните дялове $\Delta \omega_i$ на натуралните количества на стоките. Необходимо е винаги да се има предвид, че общият (сумарен) съвместен ефект се получава **само** от онези стоки, които имат съвместни ефекти, защото не всички стоки може да са с еднопосочни факторни промени на цените Δp_i и на относителните дялове $\Delta \omega_i$.

Алгебричният знак на всеки от трите общи (сумарни) ефекта зависи от **величините на** положителните и отрицателните ефекти на отделните стоки. Същите ефекти представляват съответните **приноси** на всяка стока във всеки сумарен ефект, както и в разликата на двете средни цени $\Delta \overline{\mathrm{p}} = \overline{\mathrm{p}}_1 - \overline{\mathrm{p}}_0$. Тази разлика може да се представи и като **сума на общите приноси** $p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}$ на всички стоки, всеки принос от които е равен на **сумата** на трите ефекта на i-тата стока: $\Delta \mathrm{p}, \omega_i + \Delta\omega, p_i + h_i \Delta p_i \Delta\omega_i = p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}$, откъдето за всички стоки прирастът или намалението на средната цена е $\sum(p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}) = \Delta\bar{\mathrm{p}}$.

Новото в изложената методика за тези решения е, че за разлика от известните общо четири различни решения на авторите от икономическото образование те са **осем,** всяко от които е с трите сумарни ефекта. В шест от тези решения два от трите сумарни ефекта (нетни или нетен и съвместен) са с **еднакви** положителни или отрицателни алгебрични знаци, докато третият ефект (нетен или съвместен) е с **обратен** отрицателен или положителен знак. В останалите две решения и трите ефекта са с еднакви положителни или отрицателни алгебрични знаци. Или аналитично, **осемте еднозначни** (единствени) верни и точни решения са следните:

1. $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p> 0, $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega < 0$ и $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega > 0$
2. $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p< 0, $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega > 0$ и $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega < 0$
3. $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p> 0, $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega < 0$ и $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega < 0$
4. $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p< 0, $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega > 0$ и $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega > 0$
5. $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p> 0, $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega > 0$ и $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega < 0$
6. $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p< 0, $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega < 0$ и $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega > 0$
7. $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p> 0, $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega > 0$ и $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega > 0$
8. $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p< 0, $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega < 0$ и $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega < 0$.

Частният случай само с двата нетни факторни ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p и $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega$ е извънредно рядък.

Ако внимателният читател е запознат с **общата методика** на автора за **изменението на продукцията** от еднородните и разнородните съвкупности на стоките с данните за цените на отделните стоки p_i и на техните натурални количества q_i, ще установи, че и адитивният анализ на **средните цени** се извършва със **същата методика** (Христов, 2017). Адитивните анализи на изменението на продукцията $\Delta \mathrm{P} = \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0 = \sum p_{i1} \times q_{i1} - \sum p_{i0} \times q_{i0}$ и на разликата на средните цени $\Delta\bar{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0 = \sum p_{i1} \times \omega_{i1} - \sum p_{i0} \times \omega_{i0}$ показват, че първият фактор (цените p_i) е един и същ в двата анализа. Вторият фактор обаче, $\boldsymbol{q_i}$ за първия анализ и $\boldsymbol{\omega_i}$ за втория анализ, е **различен,** защото $\omega_i = \frac{q_i}{Q}$ зависят не само от q_i, но и от Q. Оттук и разликите $\Delta\omega_i = \omega_{i1} - \omega_{i0}$ зависят не само от разликите $\Delta q_i = q_{i1} - q_{i0}$, но и от отношението $\frac{Q_1}{Q_0}$. Следователно двата адитивни факторни анализа на разликите $\Delta\mathrm{P}$ и $\Delta\overline{\mathrm{p}}$ са **различни** поради различието на вторите фактори, от които се получават различни ефекти - едните са увеличения и/или намаления на обемна резултативна величина (продукцията), а другите са увеличения и/или намаления на средно равнище (средната цена). Или независимо от еднаквия логически и аналитичен подход за адитивния факторен анализ двата анализа са **различни.**

В общия случай само една част от стоките са с еднопосочни промени (увеличения и намаления) на двата фактора, от които произлизат съвместните ефекти. В сравнение с нетните ефекти те са много **по-малки величини,** защото са алгебрични суми на положителни съвместни ефекти за едни стоки и отрицателни съвместни ефекти за други стоки. Останалата част от стоките са с разнопосочни факторни промени, от които няма съвместни ефекти.

Освен с индуктивната обобщаваща логика и нейния аналитичен аналог - дискретната функция на математическия сигнум, еднозначните решения на адитивния факторен анализ на средните равнища могат да се изведат и с приложението на **теорията на вероятностите** в демографската статистика. Според мен, след като тази теория е важна част от теоретичната математика, не би следвало приложенията на дискретните статистически методи в демографията, трудовата и социалната, както и в застрахователната статистика, да имат каквито и да било теоретико-методологични проблеми. Именно във връзка с демографията най-точните статистически показатели за интензивност на демографските явления и процеси са **вероятности** за възникването на демографските събития, като раждане, умиране, заселване, изселване и други, а населението по пол и възраст са **средите** (най-точните екстензивни показатели), от които произлизат тези събития. В този смисъл вероятностите и средите са **типичен пример** за дискретни (прекъснати) променливи, защото се съставят за всяка отделна година. На тази основа може да се изведе **точният адитивен факторен анализ,** например на разликите в броя на умрелите мъже и жени (разлики на обемни резултативни величини) по възраст $\Delta D_x = D_{xm} - D_{xf}$ за даден календарен период (година), където x е точната възраст в години, D_{xm} и D_{xf} са броят на умрелите мъже и броят на умрелите жени. Същите разлики между мъжете и жените зависят от разликите на вероятностите за умиране по възраст на мъжете и жените $\Delta q_x = q_{xm} - q_{xf}$ и разликите в броя на мъжете и жените на точните възрасти x години $\Delta S_x = S_{xm} - S_{xf}$ или средите, от които произлизат умрелите. По мое мнение този анализ не може да бъде проблем за математиците, които преподават теория на вероятностите и демографска статистика на икономистите статистици. Всички статистици и математици, които се занимават по някакъв повод с демография, знаят, че в началните детски възрасти вероятностите за умиране на момчетата са **по-големи** от вероятностите за умиране на момичетата и че броят на момчетата е също **по-голям** от броя на момичетата поради техния по-голям брой при раждане. Ако се извърши адитивен факторен анализ с теорията на вероятностите на разликата на по-големия брой на умрелите момчета и по-малкия брой на умрелите момичета на дадена детска възраст x години, се получават **три ефекта - два нетни** (прирасти на умрели момчета) и **един съвместен** също прираст на умрели момчета. Сумата на трите ефекта (прирасти) е точно равна на разликата на умрелите момчета и момичета ΔD_x. Същата, но **обратна разлика** обаче може да се анализира също с теорията на вероятностите, защото за тази теория е без значение алгебричният знак на разликата. Тогава математиците и статистиците сигурно ще установят, че обратната (отрицателна) разлика - намаление на умрелите момичета, се състои от същите по абсолютна стойност два нетни ефекта и съвместния ефект както от анализа на първата (положителна) разлика за умрелите момчета. Трите ефекта за умрелите момичета обаче ще са с обратни алгебрични знаци, тъй като са две нетни намаления и едно съвместно намаление на умрели момичета. Трите ефекта с еднаквите положителни алгебрични знаци за момчетата и отрицателни за момичетата се получават от **еднопосочните различия** на двата фактора $\Delta q_x = (q_{xm} - q_{xf}) > 0$ и $\Delta S_x = (S_{xm} - S_{xf}) > 0$ за момчетата или $\Delta q_x = \left(q_{xm} - q_{xf}\right) < 0$ и $\Delta S_x = (S_{xm} - S_{xf}) < 0$ за момичетата. Верните нетни ефекти **само** от разликата на единия фактор и **само** от разликата на другия фактор се получават чрез теорията на вероятностите, когато разликата на всеки фактор се умножи с **по-малката стойност** на другия фактор за момчетата или за момичетата както с дискретната функция на математическия сигнум. Ако разликата на всеки фактор се умножи с по-голямата стойност на другия фактор за момчетата или за момичетата, се получават **неверни ефекти** за някои възрасти, с които теорията на вероятностите няма нищо общо. Такива по-големи стойности на другия фактор участват в анализа, когато предварително е решено да се използват неговите стойности **само** от базисната или **само** от отчетната година.

Освен трите ефекта с еднаквите алгебрични знаци за началните детски възрасти ефектите от факторните различия между мъжете и жените за следващите по-високи възрасти са с различни знаци поради по-голямата смъртност на мъжете $\Delta q_x = (q_{xm} - q_{xf}) > 0$ и по-малкия техен брой $\Delta S_x = (S_{xm} - S_{xf}) < 0$. По изключение за някои възрасти може да се срещне и обратният случай на разнопосочните промени с $\Delta q_x =$

$\left(q_{xm} - q_{xf}\right) < 0$ и $\Delta S_x = \left(S_{xm} - S_{xf}\right) > 0$. Според посоченото правило за измерване на верните ефекти от всички разнопосочни факторни различия произлизат само **два нетни ефекта** с различни алгебрични знаци, **без съвместен ефект.** Ако разликата на всеки фактор се умножи с по-голямата стойност на другия фактор за мъжете или за жените, се получават **два брутни неверни ефекта.** Единият от тях ще съдържа положителния верен нетен ефект и един също положителен, но **фиктивен** (несъществуващ) съвместен ефект. **Едновременно** обаче другият брутен ефект ще съдържа отрицателния верен нетен ефект и същия по размер **фиктивен,** но отрицателен съвместен ефект! Естествено, че теорията на вероятностите няма никога да допусне такива безсмислици. Причината е известна. Двата едновременни фиктивни ефекта през отчетната година означават логически и демографски, че през тази година е **имало допълнително увеличение на умрелите мъже** в размер на положителния фиктивен съвместен ефект и едновременно е **имало допълнително намаление на умрелите мъже** в същия размер от отрицателния фиктивен съвместен ефект! Тъй като двата съвместни ефекта са **едни и същи умрели хора (мъже),** всеки може да запита действително ли са умрели **през базисната година,** за да бъдат **допълнително намаление** на умрелите мъже през отчетната година и как така са умрели **също и през отчетната година,** за да бъдат **допълнително увеличение** на умрелите? Според авторите на такива сбъркани демографски анализи излиза, че **едни и същи хора** са умрели **едновременно** през базисната и през отчетната година! Възможно е да има обаче и още едно сбъркано обяснение на **двата** фиктивни съвместни ефекта. Ако **същите хора (мъже**) са умрели само през отчетната година като **допълнително увеличение на умрелите мъже,** те трябва **едновременно и да са неумрели** през същата отчетна година, за да **анулират** допълнителното увеличение. Това означава, че веднага след своята смърт през отчетната година те **моментално са оживели**! Истината обаче е само една. Според нея при разнопосочните факторни промени **няма никакви фиктивни ефекти от адитивния факторен анализ.** Тази истина може да се обоснове логически както с предходния текст, така и както се извежда аналитично с дискретната функция на математическия сигнум и теорията на вероятностите!

Със същия метод за адитивен факторен анализ на групираните данни по възраст може да се анализира и разликата на два **общи** коефициента на смъртността на населението за два календарни периода (базисна и отчетна година). Двата коефициента, с които работи текущата практика, са известни като **общи,** защото се отнасят за цялото население от всички възрасти. Те представляват две претеглени средни равнища на смъртността за базисната година $\bar{m}_0 = \sum m_{i0}\omega_{i0}$ и за отчетната година $\bar{m}_1 = \sum m_{i1}\omega_{i1}$. В тях m_{i0} и m_{i1} са коефициентите за смъртност на населението на всяка отделна възраст, а ω_{i0} и ω_{i1} са относителните дялове на средногодишното население на същата възраст от двете негови **възрастови структури** за базисната и отчетната година.

Според теорията на вероятностите всеки ефект трябва да се определя с произведението на промяната на единия фактор с **по-малката стойност** на другия фактор от базисната или от отчетната година. Според това строго правило е **логически недопустимо** промените на коефициентите на смъртността на отделните възрасти $\Delta m_i = m_{i1} - m_{i0}$ да се умножават с относителните дялове **само** от базисната година ω_{i0} **или** с относителните дялове **само** от отчетната година ω_{i1}, както предварително се решава в практиката по усмотрение на анализаторите. По същия начин е **логически недопустимо** промените на относителните дялове $\Delta\omega_i = \omega_{i1} - \omega_{i0}$ на населението на отделните възрасти да се умножават с коефициентите на смъртността **само** от базисната година m_{i0} **или** с коефициентите на смъртността **само** от отчетната година m_{i1} , както също предварително се решава от анализаторите. Логическата недопустимост произлиза от факта, че за някои детски и млади възрасти относителните дялове от двете сравнявани години са $\omega_{i0} > \omega_{i1}$, а за повечето следващи по-големи средни и старчески възрасти относителните дялове са $\omega_{i0} < \omega_{i1}$ поради остаряване на населението. Дори само от формална гледна точка **не е възможно** относителните дялове на едната структура ω_{i0} да бъдат за **всички възрасти по-големи или по-малки** от относителните дялове ω_{i1} на другата структура. Не е възможно да се допускат тези неравенства за всички възрасти, защото се нарушава строгото математическо условие, че сумата на положителните структурни промени $\sum \Delta\omega_i > 0$ трябва да бъде равна по абсолютна стойност на сумата на отрицателните структурни промени $\sum |\Delta\omega_i < 0|$или $\sum |\Delta\omega_i > 0| = \sum |\Delta\omega_i < 0|$. Подобни фактически неравенства се наблюдават и при коефициентите на повъзрастовата смъртност. Повечето детски и млади възрасти са с неравенства $m_{i0} > m_{i1}$, а повечето средни и старчески възрасти са с обратни неравенства $m_{i0} < m_{i1}$. За тези промени на повъзрастовата смъртност обаче не важи математическото правило $\sum |\Delta m_i > 0| = \sum |\Delta m_i < 0|$, защото сумата на коефициентите m_i не е равна на 1 както сумата на относителните дялове $\sum \Delta\omega_i = 1$. Изводът от фактическите неравенства на двата фактора m_i и ω_i е, че за **някои възрасти** (млади и стари) **има еднопосочни** факторни промени $\omega_{i0} > \omega_{i1}$ и $m_{i0} > m_{i1}$, от които произлизат отрицателни съвместни ефекти $\Delta m_i \Delta\omega_i < 0$. За **повечето възрасти,** но не за всички, също има е**днопосочни** факторни промени $\omega_{i0} < \omega_{i1}$ и $m_{i0} < m_{i1}$, от които произлизат положителни съвместни ефекти $\Delta m_i \Delta \omega_i > 0$. За последната (трета) група възрасти факторните промени са **разнопосочни** $\omega_{i0} > \omega_{i1}$ и $m_{i0} < m_{i1}$, както и $\omega_{i0} < \omega_{i1}$ и $m_{i0} > m_{i1}$. От такива факторни промени **няма** съвместни ефекти. Следователно е **недопустимо** промените на всеки фактор да се умножават за всички възрасти със стойностите на другия фактор **само** от базисната или **само** от отчетната година. Точно това се прави обаче с методите за адитивен факторен анализ в икономическото образование и в обществените науки у нас (икономика, демография и социология). Всъщност с тези методи могат да се решават **условни задачи,** например какви ефекти биха се получили от промените на единия фактор, ако се бяха запазили и през отчетната година същите базисни стойности на другия фактор. По мое мнение едва ли някой би оспорил условното познавателно значение на такива решения. С тях обаче двуфакторният модел на анализа се превръща в **два условни еднофакторни модела,** с които никога не може да се намери еднозначното, единствено вярно логично и математически точно решение от **едновременните промени** на двата фактора. Например при разнопосочните факторни промени за някои възрасти с $\Delta m_i > 0$ и $\Delta \omega_i < 0$ или $\Delta m_i < 0$ и $\Delta \omega_i > 0$ ефектите ще **бъдат винаги неверни,** ако промените на всеки фактор се умножават **неправилно** с по-големите стойности на другия фактор. В такива случаи за всяка такава i-та възраст се получават **два брутни неверни ефекта $\Delta \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\omega}_i$ и $\Delta \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{m}_i$.** Всеки от тях ще съдържа **верен нетен ефект** и допълнителен **фиктивен (несъществуващ) съвместен ефект** със същия алгебричен знак на нетния ефект. Двата фиктивни ефекта са равни по абсолютна стойност, но са с различни алгебрични знаци. Сумата на двата брутни ефекта е точно равна на разликата на смъртността за същата i-та възраст $\Delta m_i = m_{i1} - m_{i0}$, защото двата фиктивни ефекта с разнопосочните алгебрични знаци взаимно се анулират. Брутните ефекти обаче са **неверни,** защото включват освен двата верни нетни ефекта още и двата безсмислени и неверни фиктивни ефекта. Според тях през една и съща отчетна година е **имало допълнително увеличение на смъртността** от положителния фиктивен съвместен ефект и **едновременно е имало допълнително намаление на смъртността** от отрицателния фиктивен съвместен ефект, което било равно по размер на допълнителното увеличение! Човек може много да се чуди на такава логика, но сериозните последици от нея са, че тя произвежда **неверни брутни ефекти,** защото факторните промени за всяка i-та възраст се отчитат **поотделно** една след друга, а **не едновременно.** По този начин и сумата на ефектите от всички възрасти е точно равна на разликата на двата общи коефициента на смъртността $\Delta \bar{m} = \bar{m}_1 - \bar{m}_0$, независимо че **ефектите за някои възрасти ще бъдат винаги неверни!** Следователно с теорията на вероятностите се получават **същите верни ефекти и решения** на адитивния факторен анализ както с дискретната нечетна функция на математическия сигнум.

Представените решения за средните цени на стоките са проверени с примери. Редът на примерите е според тяхната последователност в предходни мои публикации (Христов, 2016а, 2016б). Всеки два последователни примера са с едни и същи данни, но с разменени места за базисната и отчетната година, откъдето техните решения са **взаимообратими.** Те съдържат едни и същи ефекти по абсолютна стойност, но с **обратни** алгебрични знаци. Примерите в предходните публикации, които са с данни за цените p_i и натуралните количества на стоките q_i, са поместени в Приложение 1 - 6, докато средните цени в настоящата статия с цените p_i и относителните дялове ω_i на натуралните количества на стоките са представени в таблици 1 - 6. В следващата точка 2 са решени примерите, за които табличните данни са с относителните дялове ω_i.

2. Приложения на метода за адитивен факторен анализ на средните цени от групирани данни на стоките

Примерите за отделните осем случая с трите ефекта $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \mathrm{p}$, $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \omega$ и $\Delta\overline{\mathrm{p}}$, $\mathrm{p}\omega$ от предходната точка 1 са съставени с четири и шест стоки. Всяка от тях се характеризира със средни хронологични цени $\bar{p}_{i0}$ и $\overline{\mathrm{p}}_{i1}$, които за удобство са заменени със символите p_{i0} и p_{i1} за базисна и отчетна година. Освен с цените отделните стоки се характеризират и с относителните си дялове ω_{i0} и ω_{i1} на техните натурални количества q_{i0} и q_{i1}. Същите стоки могат да се интерпретират и като четири или шест групи стоки (подсъвкупности) на еднородните съвкупности на стоките.

2.1. Адитивен факторен анализ на средните цени от групирани данни на стоки с ефектите $\Delta\overline{\mathrm{p}}$,$\mathbf{p} > 0$, $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \boldsymbol{\omega} < 0$ и $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\boldsymbol{\omega} > 0$

Първият случай е с положителен ценови ефект $\Delta\overline{\mathrm{p}}$,$\mathrm{p} > 0$, отрицателен структурен ефект $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \omega < 0$ и положителен съвместен ефект $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega > 0$. Входните данни за примера на този случай са представени в Приложение 1 и в табл. 1.

1. Адитивен факторен анализ на средните цени на стоките

Стоки	Относителни дялове		Ефекти от промени на цените			Ефекти от промени на относителните дялове			Съвместни ефекти	$\boldsymbol{p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}}$
	$\boldsymbol{\omega_{i0}}$	$\boldsymbol{\omega_{i1}}$	$\Delta \boldsymbol{p_i}$	ω_{im}	$\Delta \boldsymbol{p_i}\omega_{im}$	$\Delta\omega_i$	$\boldsymbol{p_{im}}$	$\Delta\omega_i \boldsymbol{p_{im}}$	$\Delta p_i \Delta\omega_i$	
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5 = 3x4**	**6 = 2-1**	**7**	**8 = 6x7**	**9**	**10 = 5+8+9**
А	0.2000	0.2777	+40	0.2000	8.0000	0.0777	40	3.1111	3.1111	14.2222
Б	0.2500	0.1667	-10	0.1667	-1.6667	-0.0833	50	-4.1667	-0.8333	-6.6667

В	0.2500	0.1667	+40	0.1667	6.6667	-0.0833	50	-4.1667	-	2.5000
Г	0,3000	0.3889	-10	0.3000	-3.0000	0.0889	50	4.4444	-	1.4444
Общо	**1.0000**	**1.0000**	**X**	**X**	**+10**	**0**	**X**	**-0.7778**	**2.2778**	**11.5**

От данните в табл. 1 се установява, че средната цена на стоките за базисната година е $\bar{p}_0 = \frac{\sum p_{i0} q_{i0}}{Q_0} = \sum p_{i0}\omega_{i0} = 53.5$ хил. лв., а за отчетната година е $\bar{p}_1 = \frac{\sum p_{i1} q_{i1}}{Q_1} = \sum p_{i1}\omega_{i1} = 65.0$ хил. лв., откъдето средната базисна цена $\bar{p}_0$ се е увеличила с $\Delta\bar{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0 = 65.0 - 53.5 = 11.5$ хил. лева (табл. 1, колона 10). Това увеличение се състои от следните ефекти:

$-$ ценовият $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}$ само от промените на цените на стоките е увеличение на средната базисна цена с $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,р$= \sum \Delta p_i \omega_{imin} = 10$ хил. лева (табл. 1, колона 5). Той се образува от общия по-голям положителен ефект 14.6667 хил. лв. от преобладаващото влияние на увеличените цени на първата и третата стока с общия по-малък отрицателен ефект – 4.6667 хил. лв. от по-слабите намаления на цените на втората и четвъртата стока. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,р са отделните ценови ефекти за всяка стока в колона 5 на табл. 1.

$-$ структурният ефект $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega$ само от промените на относителните дялове на натуралните количества на стоките е минималното намаление на средната базисна цена с $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega = \sum \Delta\omega_i \mathrm{p}_{imin} = -0.7778$ хил. лева (табл. 1, колона 8). Това минимално намаление произлиза от общия малко по-голям отрицателен ефект -8.3333 хил. лв. от преобладаващото влияние на намаленията на относителните дялове на втората и третата стока, и от общия по-малък положителен ефект 7.5555 хил. лв. от увеличенията на относителните дялове на първата и четвъртата стока. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega$ са отделните структурни ефекти за всяка стока в колона 8 на табл. 1.

$-$ съвместният ефект $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega$ само от еднопосочните съвместни промени на цените на стоките и на относителните дялове на техните натурални количества е увеличението на средната базисна цена с $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega = \sum h_i \Delta p_i \Delta\omega_i = 2.2778$ хил. лева (табл. 1, колона 9). Това увеличение се получава от по-големия положителен ефект 3.1111 хил. лв. на първата стока и от по-малкия отрицателен съвместен ефект -0.8333 хил. лв. на втората стока. Другите две стоки (третата и четвъртата) са само с разнопосочни факторни промени, от които няма съвместни ефекти.

Алгебричната сума на измерените три ефекта е точно равна на увеличението на средната базисна цена с $\Delta\bar{\mathrm{p}} = 11.5$ хил. лв., или $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \ \mathrm{p} \ + \Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega + \ \Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega = 10 +$

$(-0.7778) + 2.2777 = 11.5$ хил. лева. Същото увеличение $\Delta\overline{\mathrm{p}}$ може да се представи и като сума на общите приноси на всяка i-та стока с нейните три ефекта, или $\sum\left(\Delta p_{,}\omega_i + \Delta\omega_{,}p_i + h_i\Delta p_i\Delta\omega_i\right) = \sum(p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}) = \Delta\overline{\mathrm{p}}$, откъдето 14.2222+(-6.6667) $+2.5000 + 1.4444 = 11.5$ хил. лева (табл. 1, колона 10).

С получените абсолютни ефекти от адитивния факторен анализ се преминава в неговата относителна форма:

$$\frac{\Delta\overline{\mathrm{p}}}{\overline{\mathrm{p}}_0} = \frac{11.5}{53.5} = 0.2150, \qquad \frac{\Delta\overline{\mathrm{p}},\mathrm{p}}{\overline{\mathrm{p}}_0} = \frac{10}{53.5} = 0.1869,$$
$$\frac{\Delta\overline{\mathrm{p}},\omega}{\overline{\mathrm{p}}_0} = \frac{-0.7778}{53.5} = -0.0145 \text{ и } \frac{\Delta\overline{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega}{\overline{\mathrm{p}}_0} = \frac{2.2778}{53.5} = 0.0426\,.$$

Алгебричната сума на относителните ефекти е равна на относителния прираст на базисната средна $\frac{\Delta\overline{\mathrm{p}}}{\overline{\mathrm{p}}_0} = 0.2150$, тъй като $\frac{\Delta\overline{\mathrm{p}},\mathrm{p}}{\overline{\mathrm{p}}_0} + \frac{\Delta\overline{\mathrm{p}},\omega}{\overline{\mathrm{p}}_0} + \frac{\Delta\overline{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega}{\overline{\mathrm{p}}_0} = 0.1869 + (-0.0145) + 0.0426 = 0.2150$. Интерпретацията на тези ефекти е, че нетните преобладаващи увеличения на цените на стоките са влияели за голямото относително увеличение на средната базисна цена $\overline{\mathrm{p}}_0$ с 18.69%, докато нетните преобладаващи намаления на относителните дялове са влияели за много по-слабото намаление на $\overline{\mathrm{p}}$ с -1.45%. От своя страна, преобладаващите съвместни увеличения на цените на стоките и на техните относителни дялове са влияели за относителното увеличение на $\overline{\mathrm{p}}_0$ с 4.26%. Или общото процентно увеличение на средната базисна цена с $\frac{\Delta\overline{\mathrm{p}}}{\overline{\mathrm{p}}_0} = 21.50\%$ е равно на алгебричната сума на относителните (процентни) ефекти с 18.69% + (-1.45%)+4.26%=21.50%.

2.2. Адитивен факторен анализ на средните цени от групирани данни на стоки с ефектите $\Delta\overline{\mathrm{p}},\mathrm{p} < 0$, $\Delta\overline{\mathrm{p}},\omega > 0$ и $\Delta\overline{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega < 0$

Следващият пример е за обратния случай на предходния в точка 2.1. Входните данни за него са представени в Приложение 2 и в табл. 2.

2. Адитивен факторен анализ на средните цени на стоките

Стоки	Относителни дялове		Ефекти от промени на цените			Ефекти от промени на относителните дялове			Съвместни ефекти	$p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}$
	ω_{i0}	ω_{i1}	Δp_i	ω_{im}	$\Delta p_i \omega_{im}$	$\Delta\omega_i$	p_{im}	$\Delta\omega_i p_{im}$	$\Delta p_i \Delta\omega_i$	
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5=3x4**	**6=2-1**	**7**	**8=6x7**	**9**	**10=5+8+9**
1	0.2777	0.2000	-40	0.2000	-8.0000	-0.0777	40	-3.1111	-3.1111	-14.2222
2	0.1667	0.2500	+10	0.1667	1.6667	0.0833	50	4.1667	0.8333	6.6667
3	0.1667	0.2500	-40	0.1667	-6.6667	0.0833	50	4.1667	-	-2.5000
4	0.3889	0,3000	+10	0.3000	3.0000	-0.0889	50	-4.4444	-	-1.4444
Общо	**1.0000**	**1.0000**	**X**	**X**	**-10**	**0**	**X**	**0.7778**	**-2.2778**	**-11.5**

От данните в табл. 2 се установява, че средната цена през базисната година е $\bar{p}_0 = \frac{\sum p_{i0} q_{i0}}{Q_0} = \sum p_{i0}\omega_{i0} = 65.0$ хил. лв., а за отчетната година е $\bar{p}_1 = \frac{\sum p_{i1} q_{i1}}{Q_1} = \sum p_{i1}\omega_{i1} = 53.5$ хил. лева. Или средната цена на стоките е намаляла през отчетната година с $\Delta\bar{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0 = 53.5 - 65.0 = -11.5$ хил. лева (табл. 2, колона 10). Това намаление се разпределя на отделните ефекти:

$-$ ценовият $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p само от промените на цените е намалението на средната базисна цена с $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p$= \sum \Delta p_i \omega_{imin} = -10$ хил. лева (табл. 2, колона 5). Същото намаление се образува от общия по-голям отрицателен ефект -14.6667 хил. лв. от преобладаващото влияние на намалените цени на първата и третата стока, и от общия по-малък положителен ефект 4.6667 хил. лв. от по-слабите увеличения на цените на втората и четвъртата стока. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p са отделните ценови ефекти за всяка стока в колона 5 на табл. 2.

$-$ структурният ефект $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega$ само от промените на относителните дялове на натуралните количества на стоките е минималното увеличение на $\bar{p}_0$ с $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega = \sum \Delta\omega_i \mathrm{p}_{imin} = 0.7778$ хил. лева (табл. 2, колона 8). Това минимално увеличение произлиза от общия малко по-голям положителен ефект 8.3333 хил. лв. от преобладаващото влияние на увеличенията на относителните дялове на втората и третата стока и от общия по-малък отрицателен ефект -7.5555 хил. лв. от намаленията на относителните дялове на първата и четвъртата стока. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega$ са отделните структурни ефекти за всяка стока в колона 8 на табл. 2.

$-$ съвместният ефект $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega$ само от еднопосочните съвместни промени на цените на стоките и на относителните дялове на техните натурални количества е намалението на средната базисна цена с $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega = \sum h_i \Delta p_i \Delta\omega_i = -2.2778$ хил. лева (табл. 2, колона

9). Посоченото намаление на $\bar{p}_0$ се получава от по-големия по абсолютна стойност отрицателен съвместен ефект -3.1111 хил. лв. на първата стока и от по-малкия положителен съвместен ефект 0.8333 хил. лв. на втората стока.

Общото намаление на средната базисна цена с $\Delta\bar{\mathrm{p}} = -11.5$ хил. лв се представя с алгебричната сума на трите ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}},\ \mathrm{p}\ + \Delta\bar{\mathrm{p}},\omega + \Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega = -10 + 0.7778 + (-2.2777) = -11.5$ хил. лева. Това намаление на $\bar{p}_0$ може да се представи и като сума на общите приноси на всяка i-та стока с нейните три ефекта $\sum(\Delta\mathrm{p},\omega_i + \Delta\omega, p_i + h_i\Delta p_i\Delta\omega_i) = \sum(p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}) = \Delta\bar{\mathrm{p}}$, откъдето-14.2222+ 6.6667 +(-2.5000) + $(-1.4444) = -11.5$ хил. лева (табл. 2, колона 10).

С решения пример, който е обратен на първия пример в т. 2.1, се потвърждава правилото за взаимообратимостта на ефектите от случаите, които са с едни и същи данни, но са с разменени места на базисната и отчетната година. От решението на втория пример се получават същите ефекти по абсолютна стойност както от първия пример, но са с обратни алгебрични знаци. От решението на абсолютната форма на адитивния факторен анализ се преминава в неговата относителна форма:

$$\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{-11.5}{65.0} = -0.1769, \qquad \frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{-10}{65.0} = -0.1539,$$

$$\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\omega}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{0.7778}{65.0} = 0.0120 \text{ и } \frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{-2.2778}{65.0} = -0.0350\ .$$

Алгебричната сума на относителните ефекти е равна на относителното намаление на базисната средна $\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = -0.1769$, защото $\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}}{\bar{\mathrm{p}}_0} + \frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\omega}{\bar{\mathrm{p}}_0} + \frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega}{\bar{\mathrm{p}}_0} = -0.1539 + 0.0120 + (-0.0350) = -0.1769$. Интерпретацията на получените ефекти е, че нетните преобладаващи намаления на цените на стоките са влияели за голямото относително намаление на средната базисна цена $\bar{p}_0$ с –15.39%, докато нетните преобладаващи увеличения на относителните дялове на натуралните количества на стоките са влияели за много по-слабото относително увеличение на $\bar{p}_0$ с 1.20%. Освен влиянията на тези факторни промени преобладаващите съвместни намаления на цените на стоките и на техните относителни дялове са влияели за относителното намаление на $\bar{p}_0$ с още −3.50%. Или общото относително (процентно) намаление на средната базисна цена с $\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = -17.69\%$ е равно на алгебричната сума на относителните (процентни) ефекти -15.39%+1.20%+(−3.50%)= −17.69%.

2.3. и 2.4. Адитивен факторен анализ на средните цени от групирани данни на стоки за случая с ефектите $\Delta\bar{p}$,**p**> 0, $\Delta\bar{p}, \boldsymbol{\omega} < 0$ и $\Delta\bar{p}, p\boldsymbol{\omega} < 0$ и за случая с ефектите $\Delta\bar{p}$,**p**< 0, $\Delta\bar{p}, \boldsymbol{\omega} > 0$ и $\Delta\bar{p}, p\boldsymbol{\omega} > 0$

Следващите два случая са третият и четвъртият от схемата за осемте случая на адитивния факторен анализ в точка 1. Според възприетата номерация в точка 2 двата случая трябва да бъдат с номера 2.3 и 2.4. С цел да бъдат по-кратки предходните публикации на автора, за тези случаи не са решавани примери с агрегирани данни на стоките, поради което и тук няма да бъдат решени с групирани данни (Христов, 2016а, 2016б). Ако читателят желае, може да състави такива примери с агрегирани и групирани данни и да ги реши безпроблемно с дискретната нечетна функция на математическия сигнум както предходните два примера в точки 2.1. и 2.2.

2.5. Адитивен факторен анализ на средните цени от групирани данни на стоки с ефектите $\Delta\bar{p}$,**p**> 0, $\Delta\bar{p}, \boldsymbol{\omega} > 0$ и $\Delta\bar{p}, p\boldsymbol{\omega} < 0$

Входните данни за примера на този случай са поместени в Приложение 3 и в табл. 3.

3. Адитивен факторен анализ на средните цени на стоките

Стоки	Относителни дялове		Ефекти от промени на цените			Ефекти от промени на относителните дялове			Съвместни ефекти	$\boldsymbol{p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}}$
	$\boldsymbol{\omega_{i0}}$	$\boldsymbol{\omega_{i1}}$	$\boldsymbol{\Delta p_i}$	ω_{im}	$\boldsymbol{\Delta p_i}\omega_{im}$	$\Delta\omega_i$	$\boldsymbol{p_{im}}$	$\Delta\omega_i \boldsymbol{p_{im}}$	$\boldsymbol{\Delta p_i \Delta\omega_i}$	
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5=3x4**	**6=2-1**	**7**	**8=6x7**	**9**	**10=5+8+9**
1	0.3103	0.3572	10	0.3103	3.1030	0.0469	90	4.2210	0.4690	7.7930
2	0.2759	0.3035	10	0.2759	2.7590	0.0276	80	2.2080	0.2760	5.2430
3	0.1724	0.1250	-20	0.1250	-2.5000	-0.0474	60	-2.8440	-0.9480	-6.2920
4	0.0690	0.0357	-10	0.0357	-0.3570	-0.0333	30	-0.9990	-0.3330	-1.6890
5	0.1034	0.0714	40	0.0714	2.8560	-0.0320	20	-0.6400	-	2.2160
6	0.0690	0.1072	-30	0.0690	-2.0700	0.0382	50	1.9100	-	-0.1600
					8.7180 -4.9270			8.3390 -4.4830	0.7450 -1.2810	15.2520 -8.1410
Общо	**1.0000**	**1.0000**	**X**	**X**	**3.7910**	**0**	**X**	**3.8560**	**-0.5360**	**7.1110**

Според посочените данни в табл. 3 средните цени са $\bar{p}_0 = \frac{\sum p_{i0}q_{i0}}{Q_0} = \sum p_{i0}\omega_{i0} = 74.138$ хил. лв. за базисната година и $\bar{p}_1 = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{Q_1} = \sum p_{i1}\omega_{i1} = 81.250$ хил. лв. за отчетната година. Увеличението на средната базисна цена е с $\Delta\bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_0 = 81.250 - 74.138 = 7.112$ хил. лева. Получената стойност за $\Delta\bar{p} = \bar{p}_1 = 7.1110$ хил. лв. в колона 10 на табл. 3 е поради закръгления на $\bar{p}_0$ и $\bar{p}_1$ до третия десетичен знак.

Увеличението $\Delta\overline{\mathrm{p}} = 7.1110$ хил. лв. се разпределя на следните ефекти:

– ценовият $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \mathrm{p}$ само от промените на цените на стоките е увеличение на средната базисна цена с $\Delta\overline{\mathrm{p}}$,p= $\sum \Delta p_i \omega_{imin} = 3.7910$ хил. лева (табл. 3, колона 5). Той се образува от общия по-голям положителен ефект 8.7180 хил. лв. от преобладаващото влияние на увеличените цени на първата, втората и петата стока и от общия по-малък отрицателен ефект -4.9270 хил. лв. от по-слабите намаления на цените на третата, четвъртата и шестата стока. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\overline{\mathrm{p}}$,p са отделните ценови ефекти за всяка стока в колона 5 на табл. 3.

– структурният ефект $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \omega$ само от промените на относителните дялове на натуралните количества на стоките възлиза на $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \omega = \sum \Delta\omega_i \mathrm{p}_{imin} = 3.8560$ хил. лв. и представлява увеличение на $\bar{p}_0$(табл. 3, колона 8). Той е незначително по-голям от ценовия ефект $\Delta\overline{\mathrm{p}}$,p$= 3.7910$ хил. лева. Същият структурен ефект произлиза от по-големия положителен ефект 8.3390 хил. лв. от преобладаващото влияние на увеличенията на относителните дялове на първата, втората и шестата стока и от общия по-малък отрицателен ефект -4.4830 хил. лв. от намаленията на относителните дялове на третата, четвъртата и петата стока. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \omega$ са отделните структурни ефекти за всяка стока в колона 8 на табл. 3.

– съвместният ефект $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega$ само от еднопосочните съвместни промени на цените на стоките и на относителните дялове на техните натурални количества е минималното намаление на $\bar{p}_0$ с $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega = \sum h_i \Delta p_i \Delta\omega_i = -0.5360$ хил. лева (табл. 3, колона 9). Този ефект се получава от общия по-голям отрицателен съвместен ефект -1.2810 хил. лв. от третата и четвъртата стока и от общия по-малък положителен съвместен ефект 0.7450 хил. лв. от първата и втората стока (табл. 3, колона 9). Последните две стоки (петата и шестата) са само с разнопосочни факторни промени, от които няма съвместни ефекти. Или общото увеличение на средната базисна цена с $\Delta\overline{\mathrm{p}}$ =7.1110 хил. лв. се представя с алгебричната сума на трите ефекта $\Delta\overline{\mathrm{p}}, \mathrm{p} + \Delta\overline{\mathrm{p}}, \omega + \Delta\overline{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega = 3.7910 + 3.8560 + (-0.5360) = 7.1110$ хил. лева. Същото увеличение на $\bar{p}_0$ може да се представи и със сумата на общите приноси на всяка i-та стока с нейните три ефекта, или $\sum(\Delta \mathrm{p}, \omega_i + \Delta\omega, p_i + h_i \Delta p_i \Delta\omega_i) = \sum(p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}) = \Delta\overline{\mathrm{p}}$, откъдето 7.7930 $+ 5.2430 + (-6.2920) + (-1.6890) + 2.2160 + (-0.1600) = 15.2520 - 8.1410 = 7.1110$ хил. лева (табл. 3, колона 10).

От абсолютната форма на адитивния факторен анализ се преминава в неговата относителна форма:

$$\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{7.111}{74.138} = 0.0959, \qquad \frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{3.791}{74.138} = 0.0511,$$

$$\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\omega}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{3.856}{74.138} = 0.0520 \text{ и } \frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{-0.536}{74.138} = -0.0072.$$

Алгебричната сума на тези относителни ефекти е равна на относителния прираст на базисната средна цена $\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = 0.0959$, защото $0.0511 + 0.0520 + (-0.0072) = 0.0959$. Интерпретацията на относителните ефекти е, че нетните преобладаващи увеличения на цените на стоките са влияели за относителното увеличение на средната базисна цена $\bar{p}_0$ с 5.11%, докато нетните преобладаващи увеличения на относителните дялове са влияели за малко по-голямо относително увеличение на $\bar{p}_0$ с 5.20%. Според съвместния ефект преобладаващите съвместни намаления на цените и на техните относителни дялове са влияели за много малкото относително намаление на $\bar{p}_0$ с -0.72%. Или общото процентно увеличение на средната базисна цена с $\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = 9.59\%$ е равно на алгебричната сума на относителните (процентни) ефекти 5.11%$+5.20\% + (-0.72\%) = 9.59\%$.

2.6. Адитивен факторен анализ на средните цени от групирани данни на стоки с ефектите $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p} < 0$, $\Delta\bar{\mathrm{p}},\omega < 0$ и $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega > 0$

Примерът за този случай е обратен на решения пример в предходната точка 2.5. Входните данни за него са поместени в Приложение 4 и в табл. 4.

4. Адитивен факторен анализ на средните цени на стоките

Стоки	Относителни дялове		Ефекти от промени на цените			Ефекти от промени на относителните дялове			Съвместни ефекти	$p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}$
	ω_{i0}	ω_{i1}	Δp_i	ω_{im}	$\Delta p_i\omega_{im}$	$\Delta\omega_i$	p_{im}	$\Delta\omega_i p_{im}$	$\Delta p_i\Delta\omega_i$	
i	1	2	3	4	5=3x4	6=2-1	7	8=6x7	9	10=5+8+9
1	0.3572	0.3103	-10	0.3103	-3.1030	-0.0469	90	-4.2210	-0.4690	-7.7930
2	0.3035	0.2759	-10	0.2759	-2.7590	-0.0276	80	-2.2080	-0.2760	-5.2430
3	0.1250	0.1724	20	0.1250	2.5000	0.0474	60	2.8440	0.9480	6.2920
4	0.0357	0.0690	10	0.0357	0.3570	0.0333	30	0.9990	0.3330	1.6890
5	0.0714	0.1034	-40	0.0714	-2.8560	0.0320	20	0.6400	-	-2.2160
6	0.1072	0.0690	30	0.0690	2.0700	-0.0382	50	-1.9100	-	0.1600
					4.9270			4.4830	1.2810	8.1410
					-8.7180			-8.3390	-0.7450	-15.2520
Общо	**1.0000**	**1.0000**	**X**	**X**	**-3.7910**	**0**	**X**	**-3.8560**	**0.5360**	**-7.1110**

От данните в табл. 4 двете средни цени са $\bar{p}_0 = \frac{\sum p_{i0} q_{i0}}{Q_0} = \sum p_{i0} \omega_{i0} = 81.250$ хил. лв. за базисната година и $\bar{p}_1 = \frac{\sum p_{i1} q_{i1}}{Q_1} = \sum p_{i1} \omega_{i1} = 74.138$ хил. лв. за отчетната година. Или за отчетната година средната базисна цена $\bar{p}_0$ е намаляла с $\Delta\bar{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0 = 74.138 - 81.250 = -7.112$ хил. лева. По-точната стойност на $\Delta\bar{\mathrm{p}} = -7.1110$ хил. лв. в колона 10 на табл. 4 се дължи както в предходния пример на закръгления на средните цени на $\bar{p}_0$ и $\bar{\mathrm{p}}_1$ до третия десетичен знак. Намалението $\Delta\bar{\mathrm{p}} = -7.1110$ се състои от следните ефекти:

$-$ ценовият $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}$ само от промените на цените на стоките е намалението на средната базисна цена с $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,р= $\sum \Delta p_i \omega_{imin} = -3.7910$ хил. лева (табл. 4, колона 5). То се образува от общия по-голям отрицателен ефект -8.7180 хил. лв. от преобладаващото влияние на намалелите цени на първата, втората и петата стока и от общия по-малък положителен ефект 4.9270 хил. лв. от по-слабите увеличения на цените на третата, четвъртата и шестата стока. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,р са отделните ценови ефекти за всяка стока в колона 5 на табл. 4.

$-$ структурният ефект $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega$ само от промените на относителните дялове на натуралните количества на стоките е $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega = \sum \Delta\omega_i \mathrm{p}_{imin} = -3.8560$ хил. лв. увеличение на $\bar{p}_0$ (табл. 4, колона 8). Той е незначително по-голям от ценовия ефект $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p} = -3.7910$ хил. лева. Същият структурен ефект произлиза от по-големия по абсолютна стойност отрицателен ефект -8.3390 хил. лв. от преобладаващото влияние на намаленията на относителните дялове на първата, втората и шестата стока и от общия по-малък положителен ефект 4.4830 хил. лв. от увеличенията на относителните дялове на третата, четвъртата и петата стока. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega$ са структурните ефекти за всяка стока в колона 8 на табл. 4.

$-$ съвместният ефект $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega$ от еднопосочните факторни промени на цените на стоките и на относителните дялове на техните натурални количества е минималното увеличение на $\bar{p}_0$ с $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega = \sum h_i \Delta p_i \Delta\omega_i = 0.5360$ хил. лева (табл. 4, колона 9). Този ефект се получава от общия по-голям положителен съвместен ефект 1.2810 хил. лв. от третата и четвъртата стока и от общия по-малък отрицателен съвместен ефект -0.7450 хил. лв. от първата и втората стока (табл. 4, колона 9). Последните две стоки (петата и шестата) са само с разнопосочни факторни промени, от които няма съвместни ефекти. Общото намаление на средната базисна цена с $\Delta\bar{\mathrm{p}} = -7.1110$ хил. лв. се представя с алгебричната сума на трите ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,р $+ \Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega + \Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega = -3.7910 + (-3.8560) +$

$0.5360 = -7.1110$ хил. лева. Това намаление на $\bar{p}_0$ може да се представи и с алгебричната сума на общите приноси на всяка i-та стока в колона 10 на табл. 4:

$\sum(\Delta \mathrm{p}, \omega_i + \Delta\omega, p_i + h_i \Delta p_i \Delta\omega_i) = \sum(p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}) = \Delta\bar{\mathrm{p}}$, откъдето -7.7930+ $+ (-5.2430)\ +6.2920 + 1.6890 + (-2.2160) + 0.1600 = -15.2520 + 8.1410 = -7.1110$ хил. лева.

Решеният пример е взаимообратим с предходния пример в т. 2.5, поради което получените ефекти от двата примера са равни по абсолютна стойност, но са с обратни алгебрични знаци.

От абсолютната форма на адитивния факторен анализ се преминава в неговата относителна форма:

$$\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{-7.111}{81.250} = -0.0875, \qquad \frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{-3.791}{81.250} = -0.0467,$$
$$\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{-3.856}{81.250} = -0.0475 \text{ и } \frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}\omega}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{0.536}{81.250} = 0.0066.$$

Алгебричната сума на тези относителни ефекти е равна на относителното намаление на базисната средна цена $\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = -0.0875$, защото $= -0.0467 + (-0.0475) + 0.0066 = -0.0942 + 0.0066 = -0.0876$. Разликата на този резултат с относителното намаление на средната базисна цена $\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = -0.0875$ се дължи на закръгления на $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{p}$ и $\Delta\bar{\mathrm{p}}, \omega$.

Интерпретацията на относителните ефекти е, че нетните преобладаващи намаления на цените на стоките са влияели за относителното намаление на средната базисна цена $\bar{p}_0$ с -4.67%, докато нетните преобладаващи намаления на относителните дялове на натуралните количества на стоките са влияели за малко по-голямото относително намаление на $\bar{p}_0$ с -4.75%. Само преобладаващите съвместни увеличения на цените на стоките и на техните относителни дялове са влияели за много малкото относително увеличение на $\bar{p}_0$ с 0.66%. По този начин общото процентно намаление на средната базисна цена с $\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = -8.75\%$ е равно на алгебричната сума на относителните (процентни) ефекти $-4.67\% + (-4.75\%) + 0.66\% = -8.76\%$.

2.7. Адитивен факторен анализ на средните цени от групирани данни на стоки с ефектите $\Delta\overline{p}$,**р**> 0, $\Delta\overline{p},\boldsymbol{\omega} > 0$ и $\Delta\overline{p}, p\boldsymbol{\omega} > 0$

Последните два случая от схемата в точка 2 са с еднопосочните факторни промени от **преобладаващи** едновременни увеличения или намаления на цените и на относителните дялове на стоките. Двата примера за тези случаи са съставени с четири стоки, продукцията на всяка от които се анализира с един от двата вида еднопосочни факторни промени. Както е отбелязано в методиката за адитивния факторен анализ на средните равнища (цени) в предходната точка 1, и тук е необходимо да се отбележи още веднъж строгото методологично правило за определяне на ефектите с относителните дялове на стоките чрез дискретната функция на математическия сигнум. Според него промяната на всеки от двата фактора трябва да се претегля (умножава) **винаги с по-малкото равнище** на другия фактор от базисната или от отчетната година. При адитивния факторен анализ с цените p_i и с техните натурални количества q_i са възможни едновременни увеличения или намаления и на двата фактора при някои наблюдавани стоки. Промените само на относителните дялове ω_i на една част от стоките са **винаги** разнопосочни. Една част, дори и само един от относителните дялове да се е увеличил, някои, дори и само един от относителните дялове е намалял. Тогава, **ако** цените p_i на всички наблюдавани стоки са се увеличили и те се претеглят **само** с относителните дялове ω_{i0} от базисната година или **само** с ω_{i1} от отчетната година, **една част от стоките ще бъде с неверни ефекти.** По същия начин, **ако** промените на относителните дялове ω_i се умножат **само** с цените p_{i0} от базисната година или само с p_{i1} от отчетната година, **една част от стоките ще бъде също с неверни ефекти.**

Първият от двата примера за еднопосочните факторни промени е с трите положителни ефекта $\Delta\overline{p}$,р> 0, $\Delta\overline{p},\omega > 0$ и $\Delta\overline{p}, p\omega > 0$. Входните данни за този пример са представени в Приложение 5 и в табл. 5.

5. Адитивен факторен анализ на средните цени на стоките

Стоки	Относителни дялове		Ефекти от промени на цените			Ефекти от промени на относителните дялове			Съвместни ефекти	$p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}$
	ω_{i0}	ω_{i1}	Δp_i	ω_{im}	$\Delta p_i\omega_{im}$	$\Delta\omega_i$	p_{im}	$\Delta\omega_i p_{im}$	$\Delta p_i\Delta\omega_i$	
ί	**1**	**2**	**3**	**4**	**5=3x4**	**6=2-1**	**7**	**8=6x7**	**9**	**10=5+8+9**
1	0.2222	0.3000	+40	0.2222	8.8889	+0.0778	40	+3.1111	+3.1111	+15.1111
2	0.2778	0.2000	-20	0.2000	-4.0000	-0.0778	40	-3.1111	-1.5556	-8.6667
3	0.2778	0.2000	+20	0.2000	+4.0000	-0.0778	40	-3.1111	-	+0.8889
4	0.2222	0.3000	-10	0.2222	-2.2222	+0.0778	50	+3.8889	-	+1.6667
Общо	**1.0000**	**1.0000**	**X**	**X**	**+6.6667**	**0**	**X**	**+0.7778**	**+1.5555**	**+9.0000**

Според данните в табл. 5 претеглените средни цени са $\bar{p}_0 = \frac{\sum p_{i0} q_{i0}}{Q_0} = \sum p_{i0}\omega_{i0} =$ 50 хил. лв. за базисната година и $\bar{p}_1 = \frac{\sum p_{i1} q_{i1}}{Q_1} = \sum p_{i1}\omega_{i1} = 59$ хил. лв. за отчетната година. Или средната цена $\bar{p}_0$ се е увеличила с $\Delta\bar{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0 = 59 - 50 = 9$ хил. лева (табл. 5, колона 10). Същото увеличение е сумата на следните положителни ефекти:

– ценовият $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}$ само от промените на цените на стоките е увеличението на средната базисна цена с $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p} = \sum \Delta\mathrm{p}_i \omega_{imin} = 6.6667$ хил. лева (табл. 5, колона 5). Този ефект се образува от общия по-голям положителен ефект 12.8889 хил. лв. от преобладаващото влияние на увеличените цени на първата и третата стока и от общия по-малък отрицателен ефект – 6.2222 хил. лв. от по-слабите намаления на цените на втората и четвъртата стоки. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}$ са отделните ценови ефекти за всяка стока в колона 5 на табл. 5.

– структурният ефект $\Delta\bar{\mathrm{p}},\omega$ само от промените на относителните дялове на натуралните количества на стоките е много по-малкото увеличение на $\bar{\mathrm{p}}_0$ с $\Delta\bar{\mathrm{p}},\omega = \sum \Delta\omega_i \mathrm{p}_{imin} = 0.7778$ хил. лева (табл. 5, колона 8). Това увеличение се получава от малко по-големия общ положителен ефект 7.0000 хил. лв. от преобладаващото влияние на увеличените относителни дялове на първата и четвъртата стока и от общия по-малък отрицателен ефект -6.2222 хил. лв. от намаленията на относителните дялове на втората и третата стока. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}},\omega$ са отделните структурни ефекти за всяка стока в колона 8 на табл. 5.

– съвместният ефект $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega$ само от еднопосочните съвместни промени на цените на стоките и на относителните дялове на техните натурални количества е увеличението на $\bar{\mathrm{p}}_0$ с $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega = \sum h_i \Delta p_i \Delta\omega_i = 1.5555$ хил. лева (табл. 5, колона 9). Това увеличение се получава от по-големия положителен съвместен ефект 3.1111 хил. лв. на първата стока и от по-малкия отрицателен съвместен ефект -1.5555 хил. лв. на втората стока. Другите две стоки (третата и четвъртата) са само с разнопосочни факторни промени, от които няма съвместни ефекти.

Общото увеличение на средната базисна цена $\bar{\mathrm{p}}_0$ с $\Delta\bar{\mathrm{p}}$=9 хил. лв. е равно на сумата на трите положителни ефекта: $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p} + \Delta\bar{\mathrm{p}},\omega + \Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega = 6.6667 + 0.7778 + 1.5555 = 9.0000$ хил. лева. Това увеличение може да се представи и със сумата на общите приноси с трите ефекта на всяка i-та стока, или $\sum(\Delta\mathrm{p},\omega_i + \Delta\omega, p_i + h_i \Delta p_i \Delta\omega_i) = \sum(p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}) = \Delta\bar{\mathrm{p}}$, откъдето $15.1111 - 8.6667 + 0.8889 + 1.6667 = 17.6667 - 8.6667 = 9.0000$ хил. лева (табл. 5, колона 10).

От адитивната форма се преминава в относителната форма на адитивния факторен анализ:

$$\frac{\Delta\overline{p}}{\overline{p}_0} = \frac{9}{50} = 0.1800, \qquad \frac{\Delta\overline{p}, p}{\overline{p}_0} = \frac{6.6667}{50} = 0.1333,$$

$$\frac{\Delta\overline{p}, \omega}{\overline{p}_0} = \frac{0.7778}{50} = 0.0156 \text{ и } \frac{\Delta\overline{p}, p\omega}{\overline{p}_0} = \frac{1.5555}{50} = 0.0311.$$

Абсолютната сума на относителните ефекти е равна на относителния прираст на базисната средна цена $\frac{\Delta\overline{p}}{\overline{p}_0} = 0.1800$, тъй като $0.1333 + 0.0156 + 0.0311 = 0.1800$. Интерпретацията на получените ефекти е, че нетните преобладаващи увеличения на цените на стоките са влияели за голямото относително увеличение на средната базисна цена $\overline{p}_0$ с 13.33%. Другото нетно увеличение на $\overline{p}_0$ е много по-малко - само с 1.56% от преобладаващите увеличения на относителните дялове на натуралните количества на стоките. Третото увеличение на $\overline{p}_0$ е с 3.11%, което произлиза само от преобладаващите съвместни увеличения на цените и на относителните дялове на първата стока и съвместните намаления на втората стока. Или общото процентно увеличение на $\overline{p}_0$ с $\frac{\Delta\overline{p}}{\overline{p}_0} = 18.00\%$ е равно на сумата на относителните (процентни) положителни ефекти $13.33\% + 1.56\% + 3.11\% = 18.00\%$. Подобно на пропорционалното разпределение на съвместния ефект от адитивния факторен анализ на продукцията от разнородните съвкупности на стоките в моята предходна статия и тук съвместният ефект от адитивния анализ на средните цени може да се разпредели пропорционално с два брутни факторни индекса (Христов, 2017). Те се определят с известното квадратно уравнение, което ще бъде изведено в следващата публикация за индексния факторен анализ на средните цени.

2.8. Адитивен факторен анализ на средните цени от групирани данни на стоки с ефектите $\Delta\overline{p}$,$\mathbf{p} < 0$, $\Delta\overline{p}, \boldsymbol{\omega} < 0$ и $\Delta\overline{p}, p\boldsymbol{\omega} < 0$

Този случай е последният от схемата в точка 2 и е обратен на предходния случай с трите положителни ефекта в точка 2.7. Началните данни за неговия пример са изложени в Приложение 6 и табл. 6.

6. Адитивен факторен анализ на средните цени на стоките

Стоки	Относителни дялове		Ефекти от промени на цените			Ефекти от промени на относителните дялове			Съвместни ефекти	$p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}$
	ω_{i0}	ω_{i1}	Δp_i	ω_{im}	$\Delta p_i\omega_{im}$	$\Delta\omega_i$	p_{im}	$\Delta\omega_i p_{im}$	$\Delta p_i\Delta\omega_i$	
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5=3x4**	**6=2-1**	**7**	**8=6x7**	**9**	**10=5+8+9**
1	0.3000	0.2222	-40	0.2222	-8.8889	-0.0778	40	-3.1111	-3.1111	-15.1111
2	0.2000	0.2778	+20	0.2000	+4.0000	+0.0778	40	+3.1111	+1.5556	8.6667
3	0.2000	0.2778	-20	0.2000	-4.0000	+0.0778	40	+3.1111	-	-0.8889
4	0.3000	0.2222	+10	0.2222	+2.2222	-0.0778	50	-3.8889	-	-1.6667
Общо	**1.0000**	**1.0000**	**X**	**X**	**-6.6667**	**0**	**X**	**-0.7778**	**-1.5555**	**-9.0000**

От данните в табл. 6 средните претеглени цени за базисната и отчетната година са $\bar{p}_0 = \frac{\sum p_{i0}q_{i0}}{Q_0} = \sum p_{i0}\omega_{i0} = 59$ хил. лв. и $\bar{p}_1 = \frac{\sum p_{i1}q_{i1}}{Q_1} = \sum p_{i1}\omega_{i1} = 50$ хил. лева. Според тях намалението на средната базисна цена $\bar{p}_0$ е с $\Delta\bar{\mathrm{p}} = \bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_0 = 50 - 59 = -9$ хил. лева (табл. 6, колона 10). Същото намаление е сума на трите отрицателни ефекта:

$-$ ценовият $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}$ само от промените на цените на стоките възлиза на $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p} = \sum \Delta p_i\omega_{imin} = -6.6667$ хил. лв. намаление на $\bar{p}_0$ (табл. 6, колона 5). Това намаление се образува от общия по-голям отрицателен ефект -12.8889 хил. лв. от преобладаващото влияние на намалелите цени на първата и третата стока и от общия по-малък положителен ефект 6.2222 хил. лв. от по-слабите увеличения на цените на втората и четвъртата стока. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}}$,p са отделните ценови ефекти за всяка стока в колона 5 на табл. 6.

$-$ структурният ефект $\Delta\bar{\mathrm{p}},\omega$ само от промените на относителните дялове на натуралните количества на стоките е много по-малкото намаление на $\bar{p}_0$ с $\Delta\bar{\mathrm{p}},\omega = \sum \Delta\omega_i \mathrm{p}_{imin} = -0.7778$ хил. лева (табл. 6, колона 8). Същото намаление се получава от малко по-големия общ отрицателен ефект -7 хил. лв. от преобладаващото влияние на намалелите относителни дялове на първата и четвъртата стока и от общия по-малък положителен ефект 6.2222 хил. лв. от увеличенията на относителните дялове на втората и третата стока. Приносите на отделните стоки за ефекта $\Delta\bar{\mathrm{p}},\omega$ са отделните структурни ефекти за всяка стока в колона 8 на табл. 6.

$-$ съвместният ефект $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega$ само от еднопосочните съвместни промени на цените на стоките и на относителните дялове на техните натурални количества е намалението на $\bar{p}_0$с $\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega = \sum h_i\Delta p_i\Delta\omega_i = -1.5555$ хил. лева (табл. 6, колона 9). Това намаление се получава от по-големия отрицателен съвместен ефект -3.1111 хил. лв. за първата стока и от по-малкия положителен съвместен ефект 1.5555 хил. лв. за втората стока. Другите две стоки (третата и четвъртата) са само с разнопосочни факторни промени, от които няма съвместни ефекти.

Общото намаление на средната базисна цена $\bar{p}_0$с $\Delta\bar{\mathrm{p}}$ =-9 хил. лв. е равно на сумата на трите отрицателни ефекта: $\Delta\bar{\mathrm{p}},\ \mathrm{p}\ +\ \Delta\bar{\mathrm{p}},\omega +\ \Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega = -6.6667 + (-0.7778) + (-1.5555) = -9.0000$ хил. лева. Това намаление на $\bar{p}_0$ може да се представи и със сумата на общите приноси с трите ефекта на всяка i-та стока, или $\sum(\Delta\mathrm{p},\omega_i + \Delta\omega, p_i + h_i \Delta p_i \Delta\omega_i) = \sum(p_{i1}\omega_{i1} - p_{i0}\omega_{i0}) = \Delta\bar{\mathrm{p}}$, откъдето -15.1111+ 8.6667 +(-0.8889) +

$(-1.6667) = -17.6667 + 8.6667 = -9.0000$ хил. лева (табл. 6, колона 10).

Тъй като решеният пример е обратен на предходния в точка 2.7, с неговото решение се потвърждава правилото за двата взаимообратими примера. Ефектите от тези примери са равни по абсолютна стойност, но са с различни алгебрични знаци.

От адитивната форма на анализа се преминава в неговата относителна форма:

$$\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{9}{59} = -0.1526, \qquad \frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{-6.6667}{59} = -0.1130,$$

$$\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\omega}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{-0.7778}{59} = -0.0132 \text{ и } \frac{\Delta\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega}{\bar{\mathrm{p}}_0} = \frac{-1.5555}{59} = -0.0264.$$

Сумата на отрицателните ефекти е равна на относителното намаление на средната базисна цена с $\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = -0.1526$, защото $-0.1130 + (-0.0132) + (-0.0264) = -0.1526$. Интерпретацията на тези ефекти е, че нетните преобладаващи намаления на цените са влияели за най-голямото относително намаление на средната базисна цена $\bar{\mathrm{p}}_0$ с -11.30%. Следващото много по-малко нетно намаление на $\bar{\mathrm{p}}_0$ е само с -1.32% от преобладаващите намаления на относителните дялове на стоките. Третото намаление на $\bar{\mathrm{p}}_0$ е с -2.64% само от преобладаващите съвместни намаления на цените и на относителните дялове на стоките с такива промени. Или общото процентно намаление на $\bar{\mathrm{p}}_0$ с $\frac{\Delta\bar{\mathrm{p}}}{\bar{\mathrm{p}}_0} = -15.26\%$ е равно на сумата на относителните (процентни) отрицателни ефекти $-11.30\% + (-1.32\%) + (-2.64\%) = -15.26\%$. Подобно на предходния пример с трите положителни ефекта и тук отрицателният съвместен ефект може да се разпредели пропорционално между двата нетни отрицателни ефекта.

3. Критика на методите за адитивен факторен анализ на средните равнища в икономическото образование и обществените науки у нас

Еднозначните решения на новата методика за адитивен факторен анализ на средните цени могат да се сравнят с решенията от подобни методики на дългогодишни и водещи специалисти по адитивен и индексен факторен анализ в катедра „Статистика и иконометрия" на УНСС - София, която е водеща по статистика в икономическото образование у нас. Същите методи от тази катедра се прилагат и в други университети и колежи, както се прилагат и за анализи в някои обществени науки по икономика, демография и социология в БАН. По-конкретно, имам предвид методите на проф. Кирил Гатев и проф. Димитър Аркадиев, на доц. Тодор Късналиев и доц. Андреана Стойкова-Късналиева, както и на покойните професори Здравко Сугарев, Венец Цонев и Божидар Русев. Нарочно цитирам проф. З. Сугарев и проф. Б. Русев, защото са били преподаватели и по демографска статистика, която е пример за прякото приложение на теорията на вероятностите в демографските анализи. Единствените верни решения на адитивния факторен анализ от икономическото образование са за изменението на **продукцията P от еднородни съвкупности на стоките с агрегирани данни за средните цени $\bar{p}$ и общите натурални количества на стоките Q.** Това са трите известни много отдавна решения от съветски източник (Югенбург, 1955). За разглеждания адитивен факторен анализ на продукцията от еднородните съвкупности на стоките трите решения са:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)Q_0 + (Q_1 - Q_0)\bar{p}_0 + (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)(Q_1 - Q_0),$$

$$\Delta P = P_1 - P_0 = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)Q_0 + (Q_1 - Q_0)\bar{p}_1 \text{ и}$$

$$\Delta P = P_1 - P_0 = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)Q_1 + (Q_1 - Q_0)\bar{p}_0 .$$

При $\Delta\bar{p}_1<1$ и $\Delta Q<1$ четвъртото възможно решение е $\Delta P = P_1 - P_0 = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)Q_1 + (Q_1 - Q_0)\bar{p}_1 - (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)(Q_1 - Q_0)$. То е изведено от мен през 1978 г. (Христов, 1978). За съжаление, с изключение на първото решение, най-разпространените решения на адитивния факторен анализ от икономическото образование у нас за изменението на продукцията от еднородни съвкупности на стоките с агрегираните данни за $\bar{p}$ и Q са **неверни.** Ще посоча само двама автори - проф. Кирил Гатев, който е първоизточник на тези решения, и един от последните съвременни разпространители на същите решения - проф. Димитър Аркадиев (Гатев, 1995; Аркадиев, 2017). Основната причина за техните неверни решения е, че извеждат адитивния факторен анализ от предварителен **неверен** индексен факторен анализ. От такъв индексен анализ се получават **положителни**

съвместни ефекти от едновременните намаления на двата фактора (!), както и **съвместни ефекти** от разнопосочните промени на факторите! Мисля, че е излишен всякакъв коментар на такава логика, но по-подробно за нея читателят ще намери в моята предходна статия в списанието през 2016 година. Тя е за индексния факторен анализ на **продукцията** от еднородни съвкупности на стоките според промените на тяхната средна цена $\bar{p}$ и на общото натурално количество Q **с дискретната функция на математическия сигнум** (Христов, 2016б). Други автори предлагат по две решения за адитивния факторен анализ, но **без аналитичен или логически критерий** за вярното еднозначно решение, който произлиза от дискретната функция на математическия сигнум. Както ще се види от следващото изложение, **неверни** са решенията от икономическото образование и на измененията на **средните равнища (цени)** от промените на цените на отделните стоки Δp_i и на относителните дялове $\Delta\omega_i$ на техните натурални количества. Това изложение се отнася също и за адитивния факторен анализ на демографските процеси, по-конкретно на разликите между броя на умрелите мъже и жени по възраст, както и за изменението на общата смъртност на населението.

Цитираните автори от икономическото образование, някои от които не са демографи, предлагат различни, но общо **четири метода,** ако анализираха същата разлика за общата смъртност $\Delta\bar{m} = \bar{m}_1 - \bar{m}_0$ от промените на коефициентите на смъртността на отделните възрасти $\Delta m_i = m_{i1} - m_{i0}$ и на относителните дялове на населението $\Delta\omega_i = \omega_{i1} - \omega_{i0}$.

Първият метод е с трите сумарни ефекта с тегла от базисната година:

$\Delta\bar{m} = \bar{m}_1 - \bar{m}_0 = \Delta\bar{m}, m + \Delta\bar{m}, \omega + \Delta\bar{m}, m\omega = \sum(m_{i1} - m_{i0})\, \omega_{i0} + \sum(\omega_{i1} - \omega_{i0})\, m_{i0} + \sum(m_{i1} - m_{i0})\, (\omega_{i1} - \omega_{i0})$ [Цонев, 1968; Казинец, 1969; Къналиев, 1975; Сугарев, 1975; Гатев, 1995; Русев и Сугарев, 2008; Стойкова-Къналиева, 2016, Аркадиев, 2017].

За проф. В. Цонев и проф. З. Сугарев този метод е най-съдържателен за адитивен факторен анализ на средни равнища, защото с него се получавали три ефекта. Структурният ефект $\sum(\omega_{i1} - \omega_{i0})\, m_{i0}$ се извежда от структурния индекс $I_{str} = \frac{\sum \omega_{i1} m_{i0}}{\sum \omega_{i0} m_{i0}}$ чрез разликата $\sum \omega_{i1} m_{i0} - \sum \omega_{i0} m_{i0}$. Той се появява за първи път в нашата икономическа литература в превод от чужд източник - Ройс (Reyss, немски автор), в който вместо m_{i0} се използва y_{i0} - отраслова производителност на труда на едно заето лице от базисната година (Къналиев, 1975).

С вторите два метода се получават решения, които съдържат само двата сумарни ефекта $\Delta\overline{m}, m$ и $+\Delta\overline{m}, \omega$ без сумарния съвместен ефект $\Delta\overline{m}, m\omega$:

$$\Delta\overline{m} = \overline{m}_1 - \overline{m}_0 = \Delta\overline{m}, m + \Delta\overline{m}, \omega = \sum(m_{i1} - m_{i0})\,\omega_{i0} + \sum(\omega_{i1} - \omega_{i0})\,m_{i1}$$

$\Delta\overline{m} = \overline{m}_1 - \overline{m}_0 = \Delta\overline{m}, m + \Delta\overline{m}, \omega = \sum(m_{i1} - m_{i0})\,\omega_{i1} + \sum(\omega_{i1} - \omega_{i0})\,m_{i0}$ [Перегудов, 1960; Цонев, 1968, 1970; Сугарев, 1975; Гатев, 1995; Къналиев, 2005; Стойкова-Къналиева, 2016].

Посоченият адитивен ефект от структурните промени в първото решение $\sum(\omega_{i1} - \omega_{i0})\,m_{i1}$ е известен за първи път у нас също от чужд източник (Перегудов, 1960). Той също се извежда от структурен индекс $I_{str} = \frac{\sum\omega_{i1}m_{i1}}{\sum\omega_{i0}m_{i1}}$ чрез разликата $\sum\omega_{i1}m_{i1} - \sum\omega_{i0}m_{i1}$, където m_{i1} е средна икономическа характеристика по отрасли или по друг признак. По-нататък, като възприема този структурен индекс, доц. Къналиев го подразделя на три факторни структурни субиндекса (Къналиев, 1975, с. 259). От своя страна, проф. Гатев подразделя същия структурен индекс само на два факторни субиндекса (Гатев, 1995, с. 364, 372). Моето отношение към такива индекси и адитивни структурни ефекти е отрицателно. Според предложения адитивен факторен анализ в настоящата статия тези ефекти не могат да се измерват с умножения на структурните промени $\Delta\omega_i$ **само** с другия фактор p_{i0} от базисната година, нито **само** с p_{i1} от отчетната година. След като нетните и общите структурни ефекти са условни, неточни и следователно неверни, също такива са и техните факторни части, на които ги подразделят цитираните автори.

В последното преработено издание на учебника „Демографска статистика“ от професорите Б. Русев и З. Сугарев проф. Русев е изложил два метода за решения със сумарните съвместни ефекти. Първото решение е посоченото по-горе с трите сумарни ефекта и тегла от базисната година. С втория метод решението е с тегла от отчетната година:

$$\overline{m} = \overline{m}_1 - \overline{m}_0 = \Delta\overline{m}, m + \Delta\overline{m}, \omega + \Delta\overline{m}, m\omega = \sum(m_{i1} - m_{i0})\,\omega_{i1} + \sum(\omega_{i1} - \omega_{i0})\,m_{i1} + \sum(m_{i1} - m_{i0})(\omega_{i1} - \omega_{i0})$$

[Русев, Б. и З. Сугарев, 2008; Русев, 2009].

За тези решения важи същата критика както за предходните решения. Специално за второто решение **нима е възможно при едновременни намаления на двата фактора $\Delta m_i < 0$ и $\Delta\omega_i < 0$ да се получават положителни съвместни ефекти?** Или обобщено, **всички ефекти** в представените четири решения се измерват чрез произведенията на промените на единия фактор със стойностите на другия фактор или

само от базисната година, или **само** от отчетната година! Следователно за **някои възрасти ефектите ще бъдат неверни,** а чрез тях и **общите (сумарни) ефекти,** защото се използват по-големите стойности на другия фактор, а не по-малките според дискретната функция на математическия сигнум!

От съвременните автори е цитиран колектив с ръководител доц. Андреана Стойкова-Къналиева, който е извършил едно голямо и задълбочено международно изследване на брутната добавена стойност за България и за останалите страни на Европейския съюз за периода 2000 - 2014 г. (Стойкова-Къналиева, А., А. Найденов и В. Бозев, 2016). В това всестранно изследване са анализирани както брутната добавена стойност като **обемна резултативна величина** от промените на нейното средно равнище на едно заето лице и на броя на заетите лица, така и на средното равнище като претеглена средна от секторните (отраслови) средни равнища и относителните дялове на заетите по сектори (отрасли). Показано е, че адитивният факторен анализ на изменението на брутната добавена стойност като обемна резултативна величина може да се извърши по най-разгърнатата схема на анализ със седем ефекта. Те се получават от разгърнат адитивен факторен анализ на изменението на средното равнище на този показател с трите сумарни ефекта, но **с тегла само от базисния период!** Отделно е отбелязано, че специален интерес в сравнителните териториални изследвания можело да представлява решението на разликата на средните равнища и **само** с двата сумарни ефекта $\Delta\overline{m}, m = \sum(m_{i1} - m_{i0})\, \omega_{i0}$ и $\Delta\overline{m}, \omega = \sum(\omega_{i1} - \omega_{i0})\, m_{i1}$ (с. 54).

Моето мнение е, че не може да се преминава от един модел и метод за адитивен факторен анализ в друг модел и метод с едни и същи данни, без логически и аналитичен критерий за избора на даден метод. Излиза, че според проф. Сугарев, както и според доц. Стойкова-Къналиева, това преминаване било необходимо **само за да се използвали тегла от един и същ период $\boldsymbol{\omega_{i0}}$ и $\boldsymbol{m_{i0}}$ (?)** (Сугарев, 1975, с. 97).

Доц. Стойкова-Къналиева е предложила за решение на адитивния факторен анализ на обемните резултативни величини с агрегираните (обобщаващи) данни за средното равнище (интензивния показател) и за общото натурално количество (екстензивния показател) следния адитивен факторен модел:

$\Delta V = V_1 - V_0 = \Delta \bar{y} \times N_1 + \Delta N \times \bar{y}_0$, където V_1 и V_0 са обеми на брутната добавена стойност, N е броят на заетите и $\bar{y}_0$ - средната брутна добавена стойност на едно заето лице от базисната година[1] (Стойкова-Къналиева и др., 2016, с. 49).

Този модел обаче според теорията на вероятностите и дискретната нечетна функция на математическия сигнум е верен **само** при разнопосочните факторни промени $\Delta\bar{y}_0$>0 и $\Delta N < 0$. За останалите три вида факторни промени моделът не е верен! Например според данните от изследването неблагоприятна за икономиката на България, както и за други страни, е била 2009 г., за която има **едновременни намаления** на брутната добавена стойност, броя на заетите и на средната брутна добавена стойност на едно заето лице спрямо предходната 2008 година (Стойкова-Къналиева и др., 2016, Приложение В, табл. В-1, с. 198, и табл. В-2, с. 200).

След това доц. Стойкова-Къналиева разширява адитивния факторен анализ на разликата ΔV също с **неверен модел и метод** за адитивен анализ на отрицателната разлика на двете средни брутни добавени стойности на едно заето лице $\Delta\bar{y} = \bar{y}_1 - \bar{y}_0 = -76.1$ хиляди евро:

$$\Delta V = N_0 \sum d_{i0}\, \Delta\bar{y}_i + \Delta N \sum d_{i0}\, \Delta\bar{y}_i + N_0 \sum \Delta d_i\, \bar{y}_{i0} + \Delta N \sum \Delta d_i\, \bar{y}_{i0} +$$

$$N_0 \sum \Delta d_i\, \Delta\bar{y}_i + \Delta N \sum \Delta d_i\, \Delta\bar{y}_i + \Delta N \sum d_{i0}\, \bar{y}_{i0},$$

където d_{i0} е относителният дял на заетите в i-тия сектор (отрасъл) от базисната година;

$\Delta d_i = d_{i1} - d_{i0}$ е промяната на относителния дял на заетите в i-тия сектор (отрасъл) през отчетната спрямо базисната година;

$\bar{y}_{i0}$ е средната брутна добавена стойност на едно заето лице в i-тия сектор (отрасъл) през базисната година;

$\Delta\bar{y}_i = \bar{y}_1 - \bar{y}_0$ е промяната на средната добавена стойност на едно заето лице в i-тия сектор (отрасъл) през отчетната спрямо базисната година (Пак там, с. 51).

Внимателният читател ще забележи, че всички промени на единия фактор в този модел се умножават също със стойностите на другия фактор **само** от базисната година.

[1] Означенията са според цитирания източник.

Извинявам се за откровеността, но по тази причина отхвърлям категорично всички подобни факторни анализи. За съжаление, по същата причина отхвърлям моделите и методите и на останалите цитирани автори от катедра „Статистика и иконометрия“ на УНСС, някои от които са били мои преподаватели. Проблемът обаче е много по-голям и стар, защото засяга не само икономическото образование и обществените науки, икономическата и демографската статистика, но и **приложенията на теорията на вероятностите.** Адитивният факторен анализ на средните величини е **първият масов и най-необходим** дискретен статистически факторен анализ във всички области на живота.

Заключение

С новата методика за адитивен факторен анализ на разликата на две средни цени на стоките от еднородни съвкупности с неагрегирана информация за отделните стоки завършва поредицата от авторови методики за този анализ (Христов, 2015, 2016а). Те са три предходни методики за изменението на продукцията (дискретната зависима променлива) като обемна резултативна величина в паричен израз от промените на дискретните факторни променливи - цените и натуралните количества на стоките за две сравнявани години (базисна и отчетна). Първата методика е за изменението на продукцията само на отделната стока (Христов, 2015). Другите две методики са също за изменението на продукцията, но отделно от еднородни и от разнородни съвкупности на стоките (Христов, 2016а).

Новата методика е за изменението на средната цена (дискретната зависима променлива) от промените на дискретните факторни променливи - цените на отделните стоки от еднородните съвкупности и на относителните дялове на техните **сравними** натурални количества. Следователно адитивният факторен анализ на средните цени представлява **продължение** на адитивния анализ на обемните резултативни величини (продукцията) от еднородните съвкупности на стоките с тяхната агрегирана информация. Оттук произлиза и **универсалността** на новата методика за адитивен факторен анализ в приложните статистики от всички области на живота, които работят с еднородни статистически съвкупности и неагрегирана информация за тях.

Новото в предлаганата методика са **осемте** възможни еднозначни или единствено верни и точни решения на разликата на две средни равнища от промените на показателите за интензивност на всяко явление или процес и на относителните дялове на екстензивните показатели, от които произлиза явлението или процесът. Второто

ново в методиката е, че в **общия случай** от четирите вида промени на двата фактора - еднопосочните едновременни увеличения или намаления на факторите, и от разнопосочните техни промени (единият фактор се увеличава, а другият намалява) всяко еднозначно решение съдържа **три ефекта** - $\Delta\overline{\mathrm{p}},\mathbf{p}$, $\Delta\overline{\mathrm{p}},\boldsymbol{\omega}$ и $\Delta\overline{\mathrm{p}},\mathrm{p}\boldsymbol{\omega}$ **.** Те са едновременни увеличения и/или намаления на средното базисно равнище (цената $\overline{\mathrm{p}}_0$). Двата от тях $\Delta\overline{\mathrm{p}}$,p и $\Delta\overline{\mathrm{p}},\omega$ са **нетни** само от промяната на всеки фактор, докато третият ефект $\Delta\overline{\mathrm{p}},\mathrm{p}\omega$ е **съвместен,** макар и минимален, само от еднопосочните промени на двата фактора. Единият от нетните ефекти $\Delta\overline{\mathrm{p}}$,p е **интензивният** (ценовият) само от промените на интензивните факторни показатели (цените на отделните стоки), а другият нетен ефект е **структурният** $\Delta\overline{\mathrm{p}},\boldsymbol{\omega}$ само от структурните промени или разликите на относителните дялове на екстензивните показатели (натуралните количества на стоките). Третото **ново** в методиката е, че **всички ефекти** от адитивния факторен анализ на средните равнища както ефектите от адитивния анализ на обемните резултативни величини могат да се изведат не само с индуктивната обобщаваща логика или с нейния аналитичен аналог - дискретната функция на математическия сигнум, но и с **теорията на вероятностите.** Приложенията на тази теория за статистически анализи са всички дискретни статистически адитивни и индексни факторни анализи във всички икономически и неикономически статистики. Тук е необяснима ролята и участието на математиката не само в икономическата статистика, но и във всички други неикономически приложни статистики като демографската, трудовата, социалната и застрахователната статистика. Всички статистики прилагат адитивния факторен анализ като **първия и елементарен, но най-необходим на практиката и научно-приложните изследвания** дискретен статистически факторен анализ. Ако статистическите задачи в икономиката са **принципно различни** за еднородните и разнородните съвкупности и са първо **икономически задачи,** а след това математически, всички други задачи са за еднородни съвкупности и са следователно **математически.** Техният адитивен факторен анализ е всъщност едно от най-важните приложения на теорията на вероятностите. Абсолютно е необяснимо обаче как досега този анализ не е изведен с тази теория от математици, които я владеят и се занимават или преподават демографска статистика, човешки ресурси или животозастраховане. Към тази критика ще добавя и **общата** към математическото образование в икономическите колежи и висши училища, че не се преподава дискретната нечетна функция на математическия сигнум за определяне на верните и точни ефекти от всички адитивни факторни анализи на обемни резултативни величини и на средни равнища.

С новата методика за адитивен факторен анализ се отхвърлят всички други традиционни методики за този анализ в икономическото образование и обществените науки у нас и в чужбина. Причината е, че с традиционните методики **всеки ефект** се получава като произведение на промяната на всеки фактор със стойността на другия фактор **само** от базисната година или **само** от отчетната година, а не с неговата **по-малка стойност** според дискретната функция на математическия сигнум. Получените по този начин ефекти за продукцията, както и за средните цени с традиционните методики, ще бъдат **брутни** за някои стоки. По-конкретно, при анализа на средните цени те ще съдържат освен двата верни нетни ефекта още и **два фиктивни (реално несъществуващи) ефекта.** Единият от тях е с положителен алгебричен знак и означава **допълнително увеличение** на средната базисна цена $\bar{p}_0$ през отчетната година, а другият фиктивен ефект е със същия размер, но с отрицателен знак. Той означава **едновременно допълнително намаление** на същата средна базисна цена $\bar{p}_0$ през същата отчетна година, или двата фиктивни ефекта са **логически абсурдни като допълнителни ефекти**! Дори само от формална гледна точка те взаимно се анулират и не са ефекти.

Една следваща статия ще бъде за много по-трудния индексен факторен анализ на средните равнища, който се извежда с верните и точни ефекти от адитивния факторен анализ в настоящата статия с дискретната функция на математическия сигнум.

Приложение 1

Цени и натурални количества на стоките и техните влияния върху изменението на обема на продукцията

Стоки	Базисна година			Отчетна година			Ефекти от адитивния анализ			
	p_{i0} хил. лв.	q_{i0} бр.	$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.	p_{i1} хил. лв.	q_{i1} бр.	$p_{i1}q_{i1}$ хил. лв.	$\Delta p_i q_{im}$ хил. лв.	$\Delta q_i p_{im}$ хил. лв.	$h_i \Delta p_i \Delta q_i$ хил. лв.	$p_{i1}q_{i1}$- $p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.
	1	**2**	**3=1x2**	**4**	**5**	**6=4x5**	**7**	**8**	**9**	**10=7+8+9**
А	40	40	1600	80	50	4000	+1600	+400	+400	+2400
Б	60	50	3000	50	30	1500	-300	-1000	-200	-1500
В	50	50	2500	90	30	2700	+1200	-1000	-	+200
Г	60	60	3600	50	70	3500	-600	+500	-	-100
Общо	**53.5**	**200**	**10700**	**65.0**	**180**	**11700**	**+1900**	**-1100**	**+200**	**+1000**

Приложение 2

Цени и натурални количества на стоките и техните влияния върху изменението на обема на продукцията

Стоки	Базисна година			Отчетна година			Ефекти от адитивния анализ			
	p_{i0} хил. лв.	q_{i0} бр.	$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.	p_{i1} хил. лв.	q_{i1} бр.	$p_{i1}q_{i1}$ хил. лв.	$\Delta p_i q_{im}$ хил. лв.	$\Delta q_i p_{im}$ хил. лв.	$h_i \Delta p_i \Delta q_i$ хил. лв.	$p_{i1}q_{i1}$- $p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.
	1	**2**	**3=1x2**	**4**	**5**	**6=4x5**	**7**	**8**	**9**	**10=7+8+9**
1	80	50	4000	40	40	1600	-1600	-400	-400	-2400
2	50	30	1500	60	50	3000	+300	+1000	+200	+1500
3	90	30	2700	50	50	2500	-1200	+1000	-	-200
4	50	70	3500	60	60	3600	+600	-500	-	+100
Общо	**65.0**	**180**	**11700**	**53.5**	**200**	**10700**	**-1900**	**+1100**	**-200**	**-1000**

Приложение 3

Цени и натурални количества на стоките и техните влияния върху изменението на обема на продукцията

Стоки	Базисна година			Отчетна година			Ефекти от адитивния анализ			
	p_{i0} хил. лв.	q_{i0} бр.	$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.	p_{i1} хил. лв.	q_{i1} бр.	$p_{i1}q_{i1}$ хил. лв.	$\Delta p_i q_{im}$ хил. лв.	$\Delta q_i p_{im}$ хил. лв.	$h_i \Delta p_i \Delta q_i$ хил. лв.	$p_{i1}q_{i1}$- $p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.
	1	**2**	**3=1x2**	**4**	**5**	**6=4x5**	**7**	**8**	**9**	**10=7+8+9**
1	90	90	8100	100	100	10000	+900	+900	+100	+1900
2	80	80	6400	90	85	7650	+800	+400	+50	+1250
3	80	50	4000	60	35	2100	-700	-900	-300	-1900
4	40	20	800	30	10	300	-100	-300	-100	-500
5	20	30	600	60	20	1200	+800	-200	-	+600
6	80	20	1600	50	30	1500	-600	+500	-	-100
Общо	**74.138**	**290**	**21500**	**81.250**	**280**	**22750**	**+1100**	**+400**	**-250**	**+1250**

Приложение 4

Цени и натурални количества на стоките и техните влияния върху изменението на обема на продукцията

Стоки	Базисна година			Отчетна година			Ефекти от адитивния анализ			
	p_{i0} хил. лв.	q_{i0} бр.	$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.	p_{i1} хил. лв.	q_{i1} бр.	$p_{i1}q_{i1}$ хил. лв.	$\Delta p_i q_{im}$ хил. лв.	$\Delta q_i p_{im}$ хил. лв.	$h_i \Delta p_i \Delta q_i$ хил. лв.	$p_{i1}q_{i1}$- $p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.
	1	**2**	**3=1x2**	**4**	**5**	**6=4x5**	**7**	**8**	**9**	**10=7+8+9**
1	100	100	10000	90	90	8100	-900	-900	-100	-1900
2	90	85	7650	80	80	6400	-800	-400	-50	-1250
3	60	35	2100	80	50	4000	+700	+900	+300	+1900
4	30	10	300	40	20	800	+100	+300	+100	+500
5	60	20	1200	20	30	600	-800	+200	-	-600
6	50	30	1500	80	20	1600	+600	-500	-	+100
Общо	**81.250**	**280**	**22750**	**74.138**	**290**	**21500**	**-1100**	**-400**	**+250**	**-1250**

Приложение 5

Цени и натурални количества на стоките и техните влияния върху изменението на обема на продукцията

Стоки	Базисна година			Отчетна година			Ефекти от адитивния анализ			
	p_{i0} хил. лв.	q_{i0} бр.	$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.	p_{i1} хил. лв.	q_{i1} бр.	$p_{i1}q_{i1}$ хил. лв.	$\Delta p_i q_{im}$ хил. лв.	$\Delta q_i p_{im}$ хил. лв.	$h_i \Delta p_i \Delta q_i$ хил. лв.	$p_{i1}q_{i1}$- $p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.
	1	**2**	**3=1x2**	**4**	**5**	**6=4x5**	**7**	**8**	**9**	**10=7+8+9**
1	40	40	1600	80	60	4800	+1600	+800	+800	+3200
2	60	50	3000	40	40	1600	-800	-400	-200	-1400
3	40	50	2000	60	40	2400	+800	-400	-	+400
4	60	40	2400	50	60	3000	-400	+1000	-	+600
Общо	**50**	**180**	**9000**	**59**	**200**	**11800**	**+1200**	**+1000**	**+600**	**+2800**

Приложение 6

Цени и натурални количества на стоките и техните влияния върху изменението на обема на продукцията

Стоки	Базисна година			Отчетна година			Ефекти от адитивния анализ			
	p_{i0} хил. лв.	q_{i0} бр.	$p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.	p_{i1} хил. лв.	q_{i1} бр.	$p_{i1}q_{i1}$ хил. лв.	$\Delta p_i q_{im}$ хил. лв.	$\Delta q_i p_{im}$ хил. лв.	$h_i \Delta p_i \Delta q_i$ хил. лв.	$p_{i1}q_{i1}$- $p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.
	1	**2**	**3=1x2**	**4**	**5**	**6=4x5**	**7**	**8**	**9**	**10=7+8+9**
1	80	60	4800	40	40	1600	-1600	-800	-800	-3200
2	40	40	1600	60	50	3000	+800	+400	+200	+1400
3	60	40	2400	40	50	2000	-800	+400	-	-400
4	50	60	3000	60	40	2400	+400	-1000	-	-600
Общо	**59**	**200**	**11800**	**50**	**180**	**9000**	**-1200**	**-1000**	**-600**	**-2800**

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА:

Аркадиев, Д. (2017). Някои структурни промени в родилния (фертилния) контингент в България и влиянието им върху раждаемостта, Статистика, кн. 3, www. nsi.bg.

Гатев, К. (1995). Въведение в статистиката, Лиа, С.

Казинец, Л. (1969). Измерение структурных сдвигов в экономике, Экономика, Москва.

Къналиев, Т. (1975). Структурните промени в народното стопанство и повишаване обществената производителност на труда - измерване, анализ, перспективи, С., Трудове на ВИИ „Карл Маркс", книга 1.

Къналиев, Т. (2005). Съвкупностният (статистическият) подход за изследване и някои дискусионни въпроси на индексната теория, Статистика, кн. 1, С.

Перегудов, В. (1960). Теоретические вопросы индексного анализа, Статистика, Москва.

Русев, Б., З. Сугарев (2008). Демографска статистика, Университетско издателство „Стопанство", С.

Русев, Б. (2009). Един подход за адитивен индексен анализ, Икономическа мисъл, кн. 5, С.

Стойкова-Къналиева, А., А. Найденов и В. Бозев (2016). Статистическо сравнително изследване на структурите, структурните различия и структурната динамика на основни макроикономически показатели (брутна добавена стойност) на страните от Европейския съюз през периода 2000 - 2014 г., Издателски комплекс - УНСС, София, 2016.

Сугарев, З. (1975). Демографска статистика, Наука и изкуство, С.

Христов, Е. (1978). Прирастът на продукцията според промените на вложеното количество труд и производителността на труда, Статистика, кн. 5, С.

Христов, Е. (1983). Адитивни методи за оценки на влияния и приноси на народностопанските отрасли върху обществената производителност на труда, Статистика, кн. 5, С.

Христов, Е. (1986). Ефекти от промените на смъртността и структурата на населението по възраст, Население, кн. 2, С.

Христов, Е. (1987). Оценяване на структурни и неструктурни ефекти в икономиката, Икономика, кн. 8, С.

Христов, Е. (2004а). Факторен анализ на прирасти на средни равнища с реални нетни и брутни ефекти, Икономическа мисъл, кн. 6, С.

Христов, Е. (2004б). Анализ на изменението на производителността на труда с реални структурни и неструктурни ефекти, Статистика, кн. 6, С.

Христов, Е. (2008). Едно достатъчно условие за еднозначни решения на факторни промени на средни равнища, Статистика, кн. 4, С.

Христов, Е. (2013). Факторни модели за общото, прякото и косвеното влияние на повъзрастовата смъртност върху изменението на средната продължителност на живота, Статистика, кн. 3 - 4, С.

Христов, Е. (2015). Елементарният функционален адитивен и индексен факторен анализ и неговите еднозначни решения с дискретната нечетна функция на математическия сигнум, Статистика, кн.1, www.nsi.bg.

Христов, Е. (2016а). Адитивен факторен анализ на обема на продукцията на еднородни и разнородни съвкупности на стоки с дискретната нечетна функция на математическия сигнум, Статистика, кн. 1, www.nsi.bg.

Христов, Е. (2016б). Индексен факторен анализ на обема на продукцията от еднородни съвкупности на стоки с дискретната нечетна функция на математическия сигнум, Статистика, кн. 2, www.nsi.bg.

Христов, Е. (2017). Индексен факторен анализ на обема на продукцията от еднородни и разнородни съвкупности на стоки от промените на техните цени и натурални количества с дискретната нечетна функция на математическия сигнум, Статистика, кн. 3, www.nsi.bg.

Цветков, С. (2015). За някои от проблемите при статистическото оценяване на инфлацията, Национална научна конференция, посветена на Международната година на статистиката 2013, Издателски комплекс - УНСС, София.

Цонев, В. (1968). Конкретен или абстрактен подход при статистическия анализ на прираста на обема на продукцията, Трудове на ВИИ „Карл Маркс“, том I, С.

Цонев, В. (1970). За по-конкретно дефиниране на факторите при анализ на прираст на обеми, Статистика, кн. 4, С.

Цонев, В. (1977). За двете нива на статистическия диагностичен анализ, Статистика, кн. 5, С.

Югенбург, С. (1955). О разложении абсолютных приростом по факторам, Ученые записки по статистике, АН СССР, том I, М.

Янкова, Н. (2007). Статистическо изследване на структурни изменения, Академично издателство „Проф. Марин Дринов“, БАН, София.

Hristov, E. (2008). A Complex Model for Measurement and Factor Analysis of Population Ageing, Economic Thought, year XXIII, Bulgarian Academy of Sciences Institute of Economics.

The Oxford English Dictionary 1993, Oxford University Press.

The Oxford Paperback Dictionary 1994, Oxford University Press.