ФАКТОРНИ МОДЕЛИ ЗА ОБЩОТО, ПРЯКОТО И КОСВЕНОТО ВЛИЯНИЕ НА ПОВЪЗРАСТОВАТА СМЪРТНОСТ ВЪРХУ ИЗМЕНЕНИЕТО НА СРЕДНАТА ПРОДЪЛЖИТЕЛНОСТ НА ЖИВОТА

*Емил Христов**

Въведение

Настоящата статия е продължение на предходната статия на автора „Факторни модели за общото влияние на повъзрастовата смъртност върху изменението на средната продължителност на живота", публикувана в сп. „Статистика", кн. 1 - 2/2012. В нея са представени три модела за влияние на промените или различията на смъртността Δq_x на отделните единични възрасти *x* години (по-точно в отделните едногодишни възрастови интервали *x, x* + 1 години) върху промяната или разликата Δe_0 между две средни продължителности на живота. Логическите и методологичните основи на трите факторни модела са изведени и обосновани с две последователни концепции за общото влияние на повъзрастовата смъртност върху Δe_0. Първата концепция е методологията на таблиците за смъртност, с която се изчислява средната продължителност на живота e_0 на дадено население за една календарна година или за период от две до три съседни години, докато втората концепция е за анализ на процеси. Според първата концепция с таблиците за смъртност се измерва доживяването на един хипотетичен брой живородени $l_0 = 100\ 000$ на началната възраст 0 години, който непрекъснато намалява до всяка следваща точна възраст $x = 1, 2,..., w$ години под влиянието на смъртността с вероятностите q_x във всеки възрастов интервал *x, x* + 1 години. Крайната (гранична) възраст *w* години е последната най-висока възраст на доживяване, след която се приема, че нито един човек няма да доживее следващата точна възраст *w* + 1 години. На практика се допуска, че *w*+1 може да бъде 101 или 105 години, но точната възраст *w* е най-високата доживяна възраст на най-старото умряло лице от наблюдаваното фактическо население. Или във всяка таблица за смъртност се определя хипотетичният брой на доживелите $l_1 > l_2 > ...l_w$ до всяка точна възраст $x = 1, 2,.., w$ години под

* Д.ик.н., професор; e-mail: emil_hristov_37@hotmail.com.

влияние на вероятностите за умиране q_x. С броя на доживелите l_x се пресмята средната продължителност на живота $e_0 = \frac{T_0}{l_0} = \frac{\sum_{x=1}^{w} l_x}{l_0} + 0,5$ (Русев, Сугарев, 2008). За нуждите на анализа на Δe_0 обаче по-подходяща е следната формула: $e_0 = \frac{T_0}{l_0} = \frac{\sum_{x=1}^{w} \Delta l_x + 50000}{l_0} = \frac{T_{l,w} + 50000}{l_0}$.

В нея $T_{l,w}$ е броят на всички доживели l_x до точните възрасти от една до *w* години, докато T_0 е броят на всички живеещи L_x (преживени човекогодини) от началната възраст 0 години до *w* + 1, при условие че средната възраст на умиране в отделните възрастови интервали *x, x* + 1 години е *x* + 0.5 години. Според посочената формула влиянието на повъзрастовата смъртност е, че колкото по-малки са вероятностите за умиране q_x в детските и младите възрасти, толкова доживелите l_x са по-големи числа не само на тези възрасти, но и на следващите, откъдето е по-голяма и e_0. И обратно, при големи вероятности за умиране q_x в детските и младите възрасти доживелите са по-малки числа, откъдето по-малка е и e_0. Следователно след като се приема, че две хипотетични населения - един и същ брой живородени l_0 = 100 000, измират в целия възрастов интервал от 0 до *w* + 1 години, задачата на анализа на e_0, откъдето и на Δe_0, е колко различно измират двете l_0 до отделните последователни възрасти *x* години от 0 до *w* години. От различното измиране зависи и различното доживяване на двете хипотетични населения до отделните последователни възрасти *x* години, защото смъртността и доживяемостта са два противоположни или алтернативни, но взаимозависими и допълващи се процеса. По-нататък от първата концепция за анализа на Δe_0 (методологията на таблиците за смъртност) произлиза и едно по-точно определение на преживяемостта. За разлика от доживелите l_x до точната възраст *x* години тя се представя с показателя L_x, или с хипотетичния брой на живеещите във всеки възрастов интервал *x, x* + 1 години. Този показател е традиционният в демографската статистика, с който се изчислява $e_0 = \frac{T_0}{l_0} = \frac{\sum_{x=0}^{w} L_x}{l_0}$, където T_0 е известният общ брой на всички живеещи (преживени човекогодини) от всички едногодишни възрастови интервали *x, x* + 1 години. Показателят L_x е по-точен по възраст от броя на доживелите l_x, ако отчита различията на смъртността в началото и в края на всеки интервал *x, x* + 1 години, а не една и съща смъртност в целия интервал (Chiang, 1977). Освен това според горната формула e_0 включва броя на живеещите L_0 в началния възрастов интервал 0 - 1 години, който отразява много важната детска смъртност само в този интервал. Предходната формула за e_0 с l_x отразява също важната детска смъртност, но започва с l_1. Или обобщено за L_x, колкото той е по-точно измерен, толкова по-точен и с по-големи възможности е анализът на разликата Δe_0.

Втората концепция е за анализа на процеси. Според нея както средната продължителност на живота e_0 е краен резултат от влиянието на смъртността q_x на всички възрасти от началната 0 години до последната *w* + 1 години, така и анализът на разликата между две средни продължителности на живота Δe_0 трябва да се извърши с разликите Δq_x между вероятностите за двете сравнявани населения на всички възрасти! Това условие важи не само за анализа на $\Delta e_0 = e_0^2 - e_0^1$ в динамичен аспект, например между e_0^2 през дадена отчетна година (период) спрямо e_0^1 през някаква предходна (базисна) година или период. Напротив, посоченото условие е задължително и при анализа на разликата Δe_0 за един и същ период, но на две различни населения. На практика е прието e_0^2 да бъде за населението с по-голямата e_0, но за анализа няма никакво значение дали $\Delta e_0 = e_0^2 - e_0^1$ или $\Delta e_0 = e_0^1 - e_0^2$. Именно с такъв анализ може най-ясно и точно да се покаже погрешността според теорията на вероятностите на всякакви други подходи и модели, които не са съобразени с концепцията за анализа на процеси (Христов, 2012). Според тази концепция анализът на Δe_0 може да се извърши с разликите $\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1$ или $\Delta L_x = L_x^2 - L_x^1$:

$$\Delta e = e_0^2 - e_0^1 = \left(\frac{\sum_{x=1}^{w} l_x^2}{l_0} + 0,5 \right) - \left(\frac{\sum_{x=1}^{w} l_x^1}{l_0} + 0,5 \right) = \frac{\sum_{x=1}^{w} l_x^2 - \sum_{x=1}^{w} l_x^1}{l_0} = \frac{\sum_{x=1}^{w} \left(l_x^2 - l_x^1 \right)}{l_0} = \frac{\sum_{x=1}^{w} \Delta l_x}{l_0}$$

и

$$\Delta e_0 = \frac{\sum_{x=0}^{w} L_x^2}{l_0} - \frac{\sum_{x=0}^{w} L_x^1}{l_0} = \frac{\sum_{x=0}^{w} L_x^2 - \sum_{x=0}^{w} L_x^1}{l_0} = \frac{\sum_{x=0}^{w} (L_x^2 - L_x^1)}{l_0} = \frac{\sum_{x=0}^{w} \Delta L_x}{l_0}.$$

Ако от горните формули отпадне константата l_0 = 100 000, разликите Δe_0 се превръщат в много удобните за анализ разлики $\Delta T_0 = T_0^2 - T_0^1 = = \sum_{x=1}^{w} \Delta l_x = \sum_{x=0}^{w} \Delta L_x$. В този случай ΔT_0 е прирастът (увеличението) или намалението на преживените човекогодини T_0^2 на едното население спрямо преживените човекогодини T_1 на другото население. Разликите Δl_x и ΔL_x обаче не показват в явен вид влиянието на повъзрастовата смъртност чрез съответните разлики на вероятностите за умиране $\Delta q_x = q_x^2 - q_x^1$. Това влияние се измерва най-напред върху табличния брой на умрелите d_x в таблиците за смъртност (Христов, 2012). За целта се използва основната зависимост в тези таблици, чрез която се извеждат всички техни показатели: $d_x = q_x l_x$, или по-точно $d_{x,x+1} = q_{x,x+1} l_x$ за всеки възрастов интервал *x, x* + 1 години. Същата зависимост е началният (стартов) модел за съставянето на таблиците за смъртност и на това основание може да се разглежда като начален факторен модел за влиянието на повъзрастовата смъртност върху крайните разлики за преживяемостта ΔT_0 и Δe_0. В него q_x и l_x са две дискретни факторни променливи, а d_x е зависимата дискретна променлива. По този начин задачата за измерване на общото влияние на повъзрастовата смъртност върху разликите ΔT_0 и Δe_0 се решава с теорията на вероятностите, защото от l_0 и основната зависимост $d_{x,x+1} = q_{x,x+1} l_x$ се получават рекурентно всички $l_{x+1} = l_x - d_{x,x+1}$ за следващите възрасти, а чрез тях и всички останали показатели L_x, T_0 и e_0. По този начин разликите Δd_x се дължат на общото влияние на повъзрастовата смъртност, което включва прякото влияние на фактора q_x чрез разликите $\Delta q_x = q_x^2 - q_x^1$ и косвеното влияние на фактора l_x чрез разликите $\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1$ във всеки възрастов интервал *x, x* + 1 години. Влиянието на фактора l_x се определя като косвено, защото в интервала *x, x* + 1 години то не се дължи на разликата в смъртността Δq_x. То е също влияние, защото една част от Δd_x се дължи на разликата $\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1$. От своя страна тази разлика е в резултат на общото влияние на смъртността от началната възраст 0 години до точната възраст *x* години или долната граница на възрастовия интервал *x, x*+1 години. Следователно за общото влияние на повъзрастовата смъртност има три факторни модела, които са изведени чрез разликите $\Delta d_x = d_x^2 - d_x^1$ (Христов, 2012). От това извеждане се получават обратните разлики $\Delta d_x^{'} = d_x^1 - d_x^2$ за табличния брой на преживелите или непреживелите възрастовия интервал *x, x*+1 години от населението с e_x^2. Същите разлики $\Delta d_x^{'}$ се интерпретират като ефекти от общото влияние на повъзрастовата смъртност върху крайните разлики за преживяемостта ΔT_0 и Δe_0. С първия модел се отчита приносът на общото влияние на смъртността чрез $\Delta d_x^{'}$ само в отделния възрастов интервал *x, x* + 1 години. В модела с разликите Δl_x се измерва също общото влияние на смъртността с $\Delta d_x^{'}$, но обратно - от началната възраст 0 години до точната възраст *x* години. Аналогично и в модела с разликите ΔL_x се измерва общото влияние на смъртността с $\Delta d_x^{'}$ от 0 години до средните възрасти на умиране на двете населения във всеки интервал *x, x* + 1 години. По-нататък с трета авторова концепция ефектът $\Delta d_x^{'}$ от общото влияние на смъртността в интервала *x, x* + 1 години се разделя на пряк ефект $\Delta d_{xq}^{'}$ само от разликата на смъртността $\Delta q_x^{'} = q_x^1 - q_x^2$ и на косвен $\Delta d_{xl}^{'}$ само от разликата в броя на доживелите $\Delta l_x^{'} = l_x^1 - l_x^2$. Тези ефекти са крайната цел на задачата на настоящата статия. Преди да бъдат изведени тези факторни ефекти, ще бъдат представени и интерпретирани накратко трите изходни модела за общото влияние на повъзрастовата смъртност, разгледани в предходната статия.

1. Факторни модели за общото влияние на повъзрастовата смъртност

Най-напред с $\Delta d_x^{'}$ се извежда моделът с разликите Δl_x. Според основната зависимост или стартовия модел на таблиците за смъртност $d_x = q_x l_x$ броят на доживелите l_x до всяка възраст *x* години се извежда от l_0 и табличния брой на умрелите от началната възраст 0 години до точната възраст *x* - 1 години. Или необходимата за този анализ разлика:

$$\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1 = \left(l_0 - d_0^2 - d_1^2 - d_2^2 - \ldots - d_{x-1}^2\right) - \left(l_0 - d_0^1 - d_1^1 - d_2^1 - \ldots - d_{x-1}^1\right) =$$

$$= \left(d_0^1 - d_0^2\right) + \left(d_1^1 - d_1^2\right) + \left(d_2^1 - d_2^2\right) + \ldots + \left(d_{x-1}^1 - d_{x-1}^2\right) = \sum_{t=0}^{x-1} \Delta d_t^{'}$$

След това ако тази сума се замести в сумата за Δl_x, се получава двойната сума $\Delta T_{l,m} = \sum_{x=1}^{m} \Delta l_x = \sum_{x=1}^{m} \sum_{t=0}^{x-1} \Delta d_t^{'}$, където $m = x$ - 1. Ако за улеснение се работи с една сума на разликите $\Delta d_x^{'}$, горният израз има следния вид: $\Delta T_{l,m} = \sum_{x=1}^{m} \Delta l_x = \sum_{x=0}^{m} (m - x)\Delta d_x^{'}$, където $\Delta T_{l,m}$ е прирастът или намалението на преживените човекогодини от населението с e_0^2 спрямо преживените човекогодини от населението с e_0^1 от началната възраст 0 години до точната възраст $m = x$ години. Или m е броят на разликите Δl_x от възрастта една година до възрастта x години или броят на разликите $\Delta d_x^{'}$ от възрастта 0 години до възрастта x - 1 години.

Според този модел всяка разлика Δl_x или съответната сума на $\Delta d_x^{'}$ измерва общото влияние на промените или разликите на повъзрастовата смъртност от началната възраст 0 години до точната възраст x години. По този начин Δl_x е алгебрична сума на обратните разлики $\Delta d_0^{'} + \Delta d_1^{'} + \Delta d_2^{'} + \ldots + \Delta d_{x-1}^{'}$, които могат да бъдат както положителни, така и отрицателни величини. Следователно анализът на Δe_0 трябва да започва с обратните разлики $\Delta d_x^{'}$, за да се види от кои $\Delta d_x^{'}$ произлиза общата положителна или отрицателна разлика Δl_x. По определение всяка обратна разлика $\Delta d_x^{'}>0$ се интерпретира като брой на преживелите възрастовия интервал x, x + 1 години от населението с по-малкия табличен брой на умрелите в сравнение с по-големия табличен брой на умрелите на другото население. И обратно, ако $\Delta d_x^{'}<0$, тя е броят на непреживелите възрастовия интервал x, x + 1 години от населението с по-големия табличен брой на умрелите в сравнение с по-малкия табличен брой на умрелите на другото население. Или всеки брой на преживелите от едното население е точно равен по абсолютна стойност на броя на непреживелите от другото население (Христов, 2012). На следващия етап на анализа прирастът или намалението на преживените човекогодини $\Delta T_{l,m}$ от населението с e_0^2 спрямо преживените човекогодини от населението с e_0^1 се изразява също с преживелите $\Delta d_x^{'}>0$ и непреживелите $\Delta d_x^{'}<0$ във всички Δl_x от началната възраст 0 години до точната възраст x години. Според това представяне на всяка Δl_x първата разлика е $\Delta l_1 = l_1^2 - l_1^1 = \left(l_0 - d_0^2\right) - \left(l_0 - d_0^1\right) = \left(d_0^1 - d_0^2\right) = \Delta d_0^{'}$. Втората разлика Δl_2 е равна на $\left(l_0 - d_0^2 - d_1^2\right) - \left(l_0 - d_0^1 - d_1^1\right) = \left(d_0^1 - d_0^2\right) + \left(d_1^1 - d_1^2\right) = \Delta d_0^{'} + \Delta d_1^{'}$ и т.н. до последната разлика:

$$\Delta l_x = \left(l_0 - d_0^2 - d_1^2 - \ldots - d_{x-1}^2\right) - \left(l_0 - d_0^1 - d_1^1 - \ldots - d_{x-1}^1\right) =$$

$$= \left(d_0^1 - d_0^2\right) + \left(d_1^1 - d_1^2\right) + \ldots + \left(d_{x-1}^1 - d_{x-1}^2\right) =$$

$$= \Delta d_0^{'} + \Delta d_1^{'} + \Delta d_2^{'} + \ldots + \Delta d_{x-1}^{'}$$

С това представяне на разликите Δl_x първата обратна разлика $\Delta d_0^{'}$ се среща *m* пъти в $\Delta T_{l,m}$, втората разлика $\Delta d_1^{'}$ се среща (*m* - 1) пъти, третата $\Delta d_2^{'}$ е с (*m* - 2) участия и тъй нататък до последната разлика $\Delta d_{x-1}^{'}$, която участва в $\Delta T_{l,m}$ само един път, защото [*x*-(*x*-1)]=1. По този начин $\Delta T_{l,m}$ може да се изрази чрез многократното участие на обратните разлики $\Delta d_x^{'}$ в съответните разлики Δl_x. Оттук може да се направи обобщение за всички възрасти от 0 до *w* години, според което моделът с разликите Δl_x при *m*=*w* години се превръща в модела за крайните ефекти:

$$\Delta T_{l,m} = T_{l,m}^2 - T_{l,m}^1 = \Delta T_0 = \sum_{x=1}^{w} \Delta l_x = \sum_{x=0}^{w} \left(w+1-x\right)\Delta d_x^{'},$$

където $\Delta T_{l,m} = \Delta T_0$ е прирастът или намалението на преживените човекогодини от населението с e_0^2 спрямо преживените човекогодини на населението с e_0^1 от началната възраст 0 години до последната *w* години.

С този модел при възприета последна възраст за доживяване, например *w* = 100 години, първата обратна разлика за преживелите $\Delta d_0^{'}$ от началния възрастов интервал 0 - 1 години участва в ΔT_0 всичко (100+1-0) = 101 пъти. Следващата обратна разлика $\Delta d_1^{'}$ участва в ΔT_0 всичко 100 пъти, защото (100+1-1) = 100 и т.н. до последната обратна разлика $\Delta d_w^{'}$ в интервала *w, w* + 1 години. Тя участва в ΔT_0 само един път, защото (100+1-100) = 1. Всяко произведение $\Delta d_x^{'}(w+1-x)$ е прираст при $\Delta d_x^{'}>0$ или намаление при $\Delta d_x^{'}<0$ на преживените човекогодини от населението с e_0^2. Същото произведение е крайният ефект от общото влияние на смъртността на всички възрасти върху ΔT_0 и Δe_0. Тъй като $\Delta d_x^{'}$ са разлики, всеки прираст на преживените човекогодини $\Delta d_x^{'}$ $(w+1-x)>0$ за едното население е едновременно намаление или загуба на преживени човекогодини $\Delta d_x^{'}(w+1-x)<0$ за другото население. Колкото е по-голяма по абсолютна стойност разликата $\Delta d_x^{'}$, толкова по-голям се очаква да бъде и приносът на смъртността в съответния възрастов интервал върху крайния ефект ΔT_0. Върху същия краен ефект обаче влияе и вторият фактор $(w+1-x)$ години, защото колкото е по-отдалечен възрастовият интервал *x, x* + 1 години, толкова по-голям ще бъде и приносът $\Delta d_x^{'}(w+1-x)$ върху ΔT_0. Той е наименуван „брой на годините за доживяване на един човек от $\Delta d_x^{'}$ от възрастта *x* до последната най-висока възраст *w*+1 години" (Христов, 2012). Подобно на обратната разлика $\Delta d_x^{'}$, която е показател на процеса за преживяване и е алтернативен на разликата Δd_x за умиране, така и показателят $(w+1-x)$ години за доживяване е алтернативен на възрастта *x* години за умиране от 0 до *x* години. Или с модела за крайните ефекти се оценява приносът на общото влияние на смъртността чрез броя на преживелите $\Delta d_x^{'}$ само от възрастовия интервал *x, x* + 1 години върху разликите ΔT_0 и Δe_0. Ако *x*>0 години, моделът за крайните ефекти има вида:

$$\Delta T_{x,w} = T_{x,w}^2 - T_{x,w}^1 = \sum_x^w \left(w+1-x\right)\Delta d_x^{'} \, ,$$

където $\Delta T_{x,w}$ е прирастът или намалението на преживените човекогодини от населението с e_x^2 спрямо преживените човекогодини от населението с e_x^1 за възрастовия интервал от *x* до *w* години.

В частния случай с $d_x^1 = d_x^2$, $\Delta d_x^{'} = 0$. При него няма никакъв краен ефект - прираст или намаление на човекогодини от възрастовия интервал *x, x* + 1 години, защото $\Delta d_x^{'}(w+1-x) = 0$ от общото влияние на смъртността $\Delta d_x^{'} = 0$ във възрастовия интервал.

Другият факторен модел е с по-точния показател за преживяемостта L_x, или броя на живеещите във всеки възрастов интервал *x, x* + 1 години. Конкретните предимства на L_x в сравнение с показателя l_x са изложени във въведението на настоящата статия и в предходната статия (Христов, 2012). Основното предимство произлиза от по-точната формула на L_x, която показва неговата връзка с предходния показател l_x в таблиците за смъртност: $L_x = l_x - d_x + a_x d_x$, където a_x е прословутата „фракция” на Чанг (Chiang, 1977). Според нейната по-ясна демографска интерпретация в моята предходна статия тя е средната възраст на умиране в интервала *x, x* + 1 години. По този начин L_x може да се интерпретира по-точно и като брой на доживелите до средната възраст на умиране *x* + a_x години подобно на броя на доживелите l_x до точната възраст на умиране *x* години (Христов, 2012). Тази интерпретация на L_x показва, че една от неговите дефиниции като брой на доживелите до определена дата (обикновено края на календарна година) е неточна, защото е много груба и приблизителна (Русев, Сугарев, 2008). Единственото точно определение на L_x като хипотетичен брой на доживелите до края на дадена календарна година може да се даде само чрез кохортните вероятности за умиране, съставени със съвкупности на умрелите от II род. С по-точната формула на L_x от неговото представяне чрез броя на доживелите l_x, броя на умрелите d_x и броя на умрелите до средната възраст *x* + a_x години във възрастовия интервал *x, x* + 1 години се извежда точната разлика ΔL_x в същия възрастов интервал:

$$\Delta L_x = L_x^2 - L_x^1 = \left(l_x^2 - d_x^2 + a_x^2 d_x^2\right) - \left(l_x^1 - d_x^1 + a_x^1 d_x^1\right) =$$
$$= \left(l_x^2 - l_x^1\right) + \left(d_x^1 - d_x^2\right) + \left(a_x^2 d_x^2 - a_x^1 d_x^1\right) =$$
$$= \Delta l_x + \Delta d_x^{'} + \Delta a_x d_x$$

С ΔL_x се съставя третият факторен модел за общото влияние на смъртността чрез броя на преживелите $\Delta d_x^{'}$ от началната възраст 0 години до средната възраст за доживяване x, $x+a_x$ години:

$$\Delta T_x = T_x^2 - T_x^1 = \sum_{x=0}^{m} \Delta L_x = \sum_{x=0}^{m} (\Delta l_x + \Delta d_x^{'} + \Delta a_x d_x) = \sum_{x=0}^{m} \left[\left(m+1-x\right)\Delta d_x^{'} + \Delta a_x d_x\right],$$

където ΔT_x е прирастът или намалението на преживените човекогодини от населението с e_x^2 спрямо преживените човекогодини от населението с e_x^1 за възрастовия интервал от 0 до възрастта $x+a_x$ години.

Подобно на втория факторен модел с разликите Δl_x и третият с разликите ΔL_x е за прирасти или намаления на преживените човекогодини от началната възраст 0 до следващите по-високи възрасти $x+a_x$ години. При $m=w=100$ години третият модел подобно на втория се превръща в модела за крайните ефекти за целия възрастов интервал от 0 години до последната възраст w години:

$$\Delta T_0 = T_0^2 - T_0^1 = \sum_{x=0}^{w} \Delta L_x = \sum_{x=0}^{w} \left[\left(w+1-x\right)\Delta d_x^{'} + \Delta a_x d_x\right].$$

Посочената трансформация на втория и третия факторен модел в модела за крайните ефекти има не само голямо познавателно значение за анализа на преживяемостта от общото влияние на повъзрастовата смъртност в отделните възрастови интервали. Тя се прави и с още една важна цел - чрез броя на преживелите $\Delta d_x^{'}$ да се измери прякото и косвеното влияние на повъзрастовата смъртност върху крайните разлики за преживяемостта ΔT_0 и Δe_0. Тези влияния се извеждат и обсъждат по-нататък в статията.

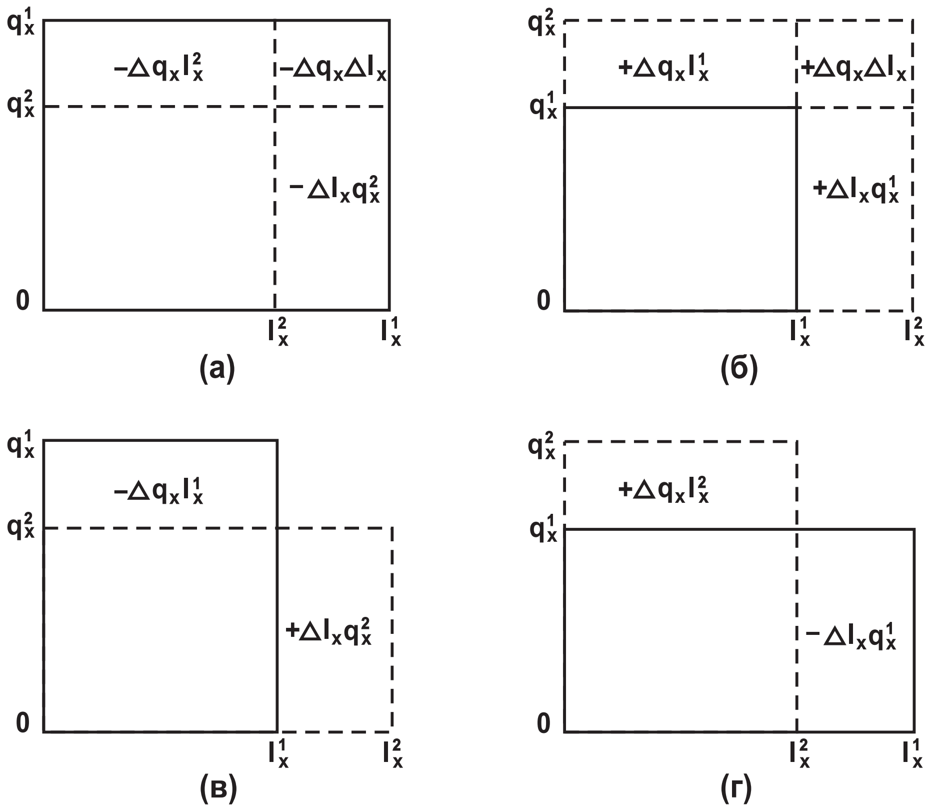
2. Разпределяне на общото влияние на смъртността на пряко и косвено във възрастовия интервал *x, x* + 1 години

Според третата концепция за анализ на ΔT_0 и Δe_0 неговата крайна цел и задача е да се раздели общото влияние на повъзрастовата смъртност Δd_x на пряко и косвено влияние в интервала x, $x+1$ години. Необходимостта от това разделение се извежда и обосновава отново с основната зависимост или стартовия модел на таблиците за смъртност $d_x = q_x l_x$.

В нея зависимата дискретна променлива d_x се определя с произведението на двете факторни също дискретни променливи. Вероятността q_x е за интензивността на смъртността във възрастовия интервал *x, x* + 1 години, а броят на доживелите l_x е за величината на средата, от която произлизат умрелите d_x (зависимата променлива). Или посочената зависимост се основава на теорията на вероятностите, според която $q_x = \frac{d_x}{l_x}$, откъдето и цялата методология на таблиците за смъртност се основава и може да се изведе от тази теория. Следователно конкретната задача на анализа е да се измери прякото влияние върху Δd_x само от разликата на вероятностите за умиране $\Delta q_x = q_x^2 - q_x^1$ и косвеното влияние само от разликата в броя на доживелите $\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1$ във всеки възрастов интервал *x, x* + 1 години. Ефектите от тези влияния са $\Delta d_{x,q}$ и $\Delta d_{x,l}$, сумата на които $\Delta d_{x,q}$ + $\Delta d_{x,l}$ е равна на разликата $\Delta d_x = d_x^2 - d_x^1$, или ефекта от общото влияние на смъртността. По този начин демографската задача за оценяването на прякото и косвеното влияние на смъртността върху доживяването преминава чрез теорията на вероятностите в задача на статистическия факторен анализ с дискретни (прекъснати) данни. В него вероятността за умиране q_x се интерпретира като интензивен показател, а броят на доживелите l_x - като екстензивен показател. Същият анализ се прилага при зависимости на всяка резултативна (зависима) променлива от мултипликативната връзка (произведение) на две или повече факторни променливи, които са интензивни и екстензивни показатели във всички приложни статистики. Всички променливи (зависимата и факторните) са дискретни (прекъснати) величини, а не непрекъснати както във функционалния математически анализ (диференциален и интегрален) с непрекъснати променливи. В този смисъл данните за повъзрастовата смъртност са дискретни величини, когато се отнасят за две години (базисна и отчетна) или за два периода, например тригодишни, за които НСИ съставя таблици за смъртност. Различието между две таблици за смъртност с дискретни данни обаче може да бъде анализирано и по всякакъв друг признак - категориен или териториален.

Както е известно, статистическият факторен анализ с дискретни данни има две форми - адитивна и индексна, откъдето неговото по-точно название трябва да бъде „адитивен факторен анализ с дискретни данни" и „индексен факторен анализ с дискретни данни". Адитивният анализ използва разликите на дискретните променливи Δd_x, Δq_x и Δl_x, докато индексният се извършва с индекси или отношенията за всяка от тези променливи $\mathrm{I}_{dx} = \dfrac{d_x^2}{d_x^1}$, $\mathrm{I}_{qx} = \dfrac{q_x^2}{q_x^1}$ и $\mathrm{I}_{lx} = \dfrac{l_x^2}{l_x^1}$. Според теорията на вероятностите и от адитивния факторен анализ, който се основава на нея, от двете факторни разлики Δq_x и Δl_x може да възниква във всеки интервал x, $x+1$ години един от всичко четири възможни случая с ефектите $\Delta d_{x,q}$ и $\Delta d_{x,l}$. Те се получават аналитично с известния метод за еднозначни решения на автора от адитивния факторен анализ на абсолютни резултативни величини (Христов, 1978, 2004а, 2010). Четирите случая на ефектите $\Delta d_{x,q}$ и $\Delta d_{x,l}$ са представени графично на фиг. 1.

Следващият анализ се отнася за най-срещаното сравнение между



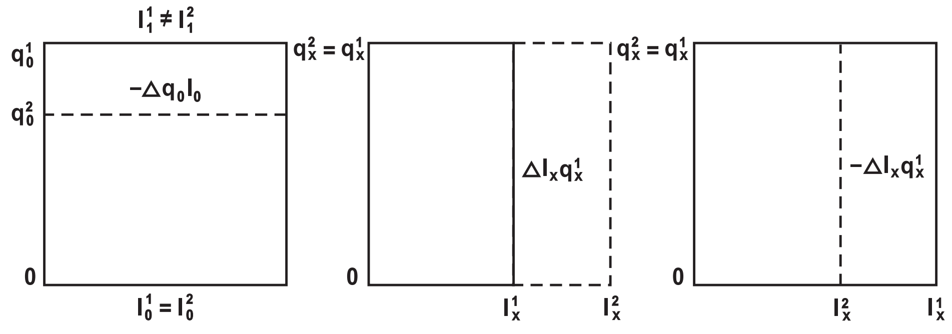
Фиг. 1. Ефекти $\Delta q_x l_{x\,min}$, $\Delta l_x q_{x\,min}$ и $\Delta q_x \Delta l_x$ от промени на смъртността Δq_x и на доживелите Δl_x във възрастовия интервал **x**, **x+1** години

две таблици за смъртност за отчетен и базисен период. При такова сравнение първите два случая (а) и (б) на фиг. 1 се характеризират с едновременни и еднопосочни факторни промени $\Delta q_x = q_x^2 - q_x^1$ и $\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1$. Случаят (а) е с отрицателни факторни промени или намаления на смъртността $\Delta q_x = (q_x^2 - q_x^1) < 0$ и на доживелите $\Delta l_x = (l_x^2 - l_x^1) < 0$, откъдето разликата в броя на умрелите Δd_x от общото влияние на смъртността е също отрицателна величина $\Delta d_x = (d_x^2 - d_x^1) < 0$. С адитивния факторен анализ тя се разпределя на следните три отрицателни ефекта: пряк нетен ефект $\Delta d_{x,q} = -\Delta q_x l_x^2$ само от прякото влияние на намалението на смъртността Δq_x<0, косвен нетен ефект $\Delta d_{x,l} = -\Delta l_x q_x^2$ само от косвеното влияние на смъртността чрез намалението на доживелите Δl_x<0 и отрицателен съвместен ефект $\Delta d_{xql} = \Delta q_x \Delta l_x$ от едновременното пряко и косвено влияние на смъртността в интервала *x, x* + 1 години. Сумата на всички ефекти е $\Delta d_{x,q} + \Delta d_{x,l} + \Delta d_{xql} = -\Delta q_x l_x^2 + \left(-\Delta l_x q_x^2\right) + \left(-\Delta q_x \Delta l_x\right) = \Delta d_x < 0$. Следващият случай (б) на фиг. 1 е обратен на предходния (а). Той е с увеличения на смъртността $\Delta q_x = (q_x^2 - q_x^1) > 0$ и на доживелите $\Delta l_x = \left(l_x^2 - l_x^1\right) > 0$, откъдето разликата в броя на умрелите от общото влияние на смъртността е също положителна величина $\Delta d_x = (d_x^2 - d_x^1) > 0$. Тя се разпределя също на три, но вече положителни ефекта: пряк нетен ефект $\Delta d_{x,q} = +\Delta q_x l_x^1$ само от прякото влияние на увеличението на смъртността Δq_x>0, косвен нетен ефект $\Delta d_{x,l} = +\Delta l_x q_x^1$ само от косвеното влияние на смъртността чрез увеличението на доживелите Δl_x>0 и положителен съвместен ефект $\Delta d_{xql} = +\Delta q_x \Delta l_x$ от едновременното пряко и косвено влияние на смъртността в интервала *x, x* + 1 години. Сумата от трите ефекта е $+\Delta q_x l_x^1 + \Delta l_x q_x^1 + \Delta q_x \Delta l_x = \Delta d_x > 0$. Ако в двата случая (а) и (б) се работи с едни и същи данни за двата периода и се разменят техните места, се получават едни и същи резултати по абсолютна стойност, но с обратни алгебрични знаци.

За разлика от случаите (а) и (б) следващите (в) и (г) на фиг. 1 са с разнопосочни промени Δq_x и Δl_x на двата фактора q_x и l_x. Случаят (в) е с намаление на смъртността $\Delta q_x = (q_x^2 - q_x^1) < 0$ и увеличение на броя на доживелите $\Delta l_x = (l_x^2 - l_x^1) > 0$. В зависимост от величините на промените Δq_x и Δl_x по абсолютна стойност разликата Δd_x от общото влияние на смъртността може да бъде отрицателна величина $\Delta d_x = (d_x^2 - d_x^1) < 0$ или положителна величина $\Delta d_x = (d_x^2 - d_x^1) > 0$. С адитивния факторен анализ тя се разделя само на два ефекта: пряк нетен $\Delta d_{x,q} = -\Delta q_x l_x^1$ само от прякото влияние на намалението на смъртността Δq_x<0 и косвен нетен ефект $\Delta d_{x,l} = +\Delta l_x q_x^2$ само от косвеното влияние на смъртността чрез увеличението на доживелите Δl_x>0. Както се вижда на фиг. 1, при случая (в) няма съвместен ефект (нито положителен, нито отрицателен) - мястото за него на фигурата е празно. Сумата на двата ефекта е $\Delta d_{x,q} + \Delta d_{x,l} = -\Delta q_x l_x^1 + \Delta l_x q_x^2 = \Delta d_x$. Следващият и последен случай (г) на фиг. 1 е обратен на случая (в) с разнопосочните факторни промени. Той е с увеличение на смъртността $\Delta q_x = (q_x^2 - q_x^1) > 0$ и намаление на доживелите $\Delta l_x = (l_x^2 - l_x^1) < 0$. Подобно на предходния случай (в) и тук при случая (г) разликата в броя на умрелите Δd_x от общото влияние на смъртността в интервала *x, x* + 1 години може да бъде също отрицателна величина $\Delta d_x = (d_x^2 - d_x^1) < 0$ или положителна величина $\Delta d_x = (d_x^2 - d_x^1) > 0$. Тя се разделя също на два ефекта: пряк нетен $\Delta d_{x,q} = +\Delta q_x l_x^2$ само от прякото влияние (увеличение) на смъртността Δq_x>0 и косвен нетен ефект $\Delta d_{x,l} = -\Delta l_x q_x^1$ само от косвеното влияние на смъртността чрез намалението на доживелите $\Delta l_x < 0$. На фиг. 1 се вижда, че и в случая (г) няма съвместен ефект - мястото за него на фигурата е празно. Сумата на двата ефекта е $\Delta d_{x,q} + \Delta d_{x,l} = +\Delta q_x l_x^2 + (-\Delta l_x q_x^1) = \Delta d_x$. Ако за двата случая (в) и (г) се използват също едни и същи данни, но с разменени места за двата периода, се получават едни и същи ефекти по абсолютна стойност, но с различни алгебрични знаци. Или обобщено, и при двата случая (в) и (г) с разнопосочните факторни промени Δq_x и Δl_x няма съвместни ефекти.

Освен посочените четири случая с факторните ефекти на фиг. 1 могат да се срещнат, макар и много рядко, още четири частни случая. Единият от тях е с $\Delta d_x = 0$ при равни по абсолютна стойност пряк и косвен ефект $\left|\Delta d_{x,q}\right| = \left|\Delta d_{x,l}\right|$, но с различни знаци. По тази причина тяхната сума е равна на 0. Останалите частни случаи са представени на фиг. 2.

Първият частен случай (а) на фиг. 2 се среща само в първия възрастов интервал 0 - 1 години, за който $l_0^1 = l_0^2 = 100000$ живородени, откъдето



(а) (б) (в)

Фиг. 2. Частни случаи на ефекти от промени на смъртността Δq_x и на доживелите Δl_x във възрастовия интервал **x**, **x+1** години

$\Delta l_0 = 0$. Или при него няма косвен ефект $\Delta d_{x,l} = 0$, защото $\Delta l_0 = 0$, а има само пряк ефект $\Delta d_{0,q} = \Delta q_0 l_0 < 0$, който се дължи на другата факторна промяна $\Delta q_0 = q_0^2 - q_0^1 < 0$. Освен $\Delta q_0 <0$ тази факторна разлика може да бъде и положителна $\Delta q_0 >0$, откъдето прекият ефект ще бъде също положителен $\Delta d_{0,q} = \Delta q_0 l_0 > 0$.

За втория и третия частен случаи (б) и (в) на фиг. 2 е обратното, защото те нямат преки ефекти $\Delta d_{x,q} = 0$ поради равните вероятности за умиране $q_x^1 = q_x^2$. Те обаче имат косвени ефекти - положителен $\Delta d_{x,l} = \Delta l_x q_x^1 > 0$ в случая (б) на фиг. 2 и отрицателен $\Delta d_{x,l} = -\Delta l_x q_x^1 < 0$ в случая (в) на фиг. 2. Очевидно покойният проф. Русев не е схващал смисъла на косвените ефекти според последните два частни случая (Русев, 2010).

Най-накрая еднозначните и точни решения от адитивния факторен анализ за всички случаи на преки и косвени ефекти могат да се представят обобщено с израза:

$$\Delta d_x = d_x^2 - d_x^1 = \Delta d_{x,q} + \Delta d_{x,l} + h_x \Delta q_x \Delta l_x = \Delta q_x l_{x\min} + \Delta l_x q_{x\min} + h_x \Delta q_x \Delta l_x ,$$

където $\Delta q_{x\min} = q_x^1$ при $q_x^1 < q_x^2$ или $q_{x\min} = q_x^2$ при $q_x^1 > q_x^2$, h_x е алгебричният знак на съвместния ефект. При разнопосочни промени с $\Delta q_x > 0$ и $\Delta l_x < 0$ или с $\Delta q_x < 0$ и $\Delta l_x > 0$ няма съвместни ефекти и $h_x = 0$, откъдето $\Delta q_x \Delta l_x = 0$. При едновременни положителни промени $\Delta q_x > 0$ и $\Delta l_x > 0$, $h_x = 1$, откъдето съвместният ефект е положителен $\Delta q_x \Delta l_x > 0$. И обратно, при отрицателни промени $\Delta q_x < 0$ и $\Delta l_x < 0$, $h_x = -1$, откъдето и съвместният ефект е отрицателен $\Delta q_x \Delta l_x$ <0.

До това обобщено еднозначно решение с параметъра *h* стигнах по индуктивен логически път в икономическата статистика (Христов, 2004а, 2004б, 2004в, 2006). След като обаче анализът на прякото и косвеното влияние на смъртността в настоящата статия се извършва чрез теорията на вероятностите, теоретичното еднозначно решение е същото, но параметърът *h,* който е изведен индуктивно, трябва да се обозначи с теоретичния критерий от функционалния анализ с дискретни променливи. Във връзка с това отбелязах в моята предходна статия, че до еднозначно решение може да се стигне и с критерий от теоретичната математика, който, колкото и да е странно, не е въведен още в приложните статистики (Христов, 2012). Той е дискретната нечетна сигнум функция (signum function), показваща алгебричния знак sgn на реално число *x* с трите стойности: sgn(x) = -1 при x<0, 0 при x = 0 и 1 при x>0 (Bachman, Narici, 1966, Kreyszig, 1993; Милкоева, 1998). Тъй като в разглежданата задача се определя алгебричният знак на съвместния ефект в разликата Δd_x от промяната на зависимата дискретна променлива d_x, точният теоретичен критерий е дискретната нечетна функция на математическия сигнум на ординатата. Тогава теоретичното решение от адитивния факторен анализ на разликата Δd_x от прякото и косвеното влияние на смъртността във възрастовия интервал *x, x* + 1 години се записва с израза:

$$\Delta d_x = \Delta d_{x,q} + \Delta d_{x.l} + \operatorname{sgn} \Delta q_x \Delta l_x ,$$

където sgn = h_x.

От изследването дотук може да се направи много важен извод за следващия анализ на ΔT_0 и Δe_0. Според основната зависимост в таблиците за смъртност $\Delta d_{x.x+1} = q_{x,x+1} l_x$, която се основава на теорията на вероятностите, прякото влияние на смъртността $\Delta d_{x.q}$ се измерва в границите на целия едногодишен възрастов интервал *x, x* + 1 години с разликата между двете вероятности за умиране $\Delta q_x = q_x^2 - q_x^1$ в този интервал. Другото косвено влияние на смъртността $\Delta d_{x.l}$ се определя също в границите на целия възрастов интервал с разликата между доживелите $\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1$ до точната възраст *x* години или долната граница на възрастовия интервал.

По-нататък анализът може да продължи с разпределяне на евентуалните съвместни ефекти $\Delta q_x \Delta l_x$ >0 и $\Delta q_x \Delta l_x$ <0 между двата нетни ефекта $\Delta d_{x,q}$ и $\Delta d_{x.l}$. Необходимостта от такова разпределяне зависи от целта на задачата. В решението на някои задачи с адитивния факторен анализ съвместният ефект остава цял и дори се обявява за „неразпределим" (Сугарев, Русев, 1992). Едно от предимствата на адитивния анализ в такива случаи е представянето на съвместните ефекти в явен вид. За други задачи обаче, каквато е настоящата, се налага разпределяне на $\Delta q_x \Delta l_x$ между двата нетни ефекта $\Delta d_{x,q}$ и $\Delta d_{x.l}$, защото се търси крайното пряко и косвено влияние на промените Δq_x и Δl_x върху промяната Δd_x във възрастовия интервал *x, x* + 1 години. Задължително разпределяне на съвместния ефект се налага само при индексния факторен анализ, защото индексът на зависимата променлива $\mathrm{I}_{dx} = \dfrac{d_x^2}{d_x^1}$ се представя само с произведението на двата факторни индекса I_q и I_l, всеки от които съдържа съответната пропорционална част от предварително разпределения съвместен ефект (Христов, 2010а, 2010б). Следователно при индексния анализ също се запазва съвместният ефект, но той не е в явен вид. Пропорционалното разпределяне на този ефект $\Delta q_x \Delta l_x$ се извършва с относителните дялове на нетните ефекти $\Delta d_{x,q}$ и $\Delta d_{x.l}$:

$$\Delta d_{xqq} = \frac{\Delta d_{x,q}}{\Delta d_{x,q} + \Delta d_{x,l}} \Delta q_x \Delta l_x = f_q \Delta q_x \Delta l_x \text{ и}$$

$$\Delta d_{xll} = \frac{\Delta d_{x,l}}{\Delta d_{x,q} + \Delta d_{x,l}} \Delta q_x \Delta l_x = f_l \Delta q_x \Delta l_x ,$$

откъдето $\Delta d_{xqq} + \Delta d_{xll} = \Delta q_x \Delta l_x$.

С получените пропорционални части на съвместния ефект се намират брутните (крайни) ефекти от прякото и косвеното влияние на факторните промени Δq_x и Δl_x върху разликата на зависимата променлива Δd_x:

$$\textit{вр}\Delta d_{x,q} = \Delta d_{x,q} + f_q \Delta q_x \Delta l_x \quad \text{и} \quad \textit{вр}\Delta d_{x,l} = \Delta d_{x,l} + f_l \Delta q_x \Delta l_x ,$$

откъдето $\textit{вр}\Delta d_{x,q} + \textit{вр}\Delta d_{x,l} = \Delta d_x$.

Във връзка с изведените по-горе еднозначни решения чрез теорията на вероятностите и дискретната нечетна функция на математическия сигнум ще покажа погрешността на адитивния факторен анализ в последното издание на учебника по демографска статистика за специалността „Статистика и иконометрия" в УНСС (Русев, Сугарев, 2008). За съжаление, налага се пак да взема отношение за този учебник, защото едни от първите приложения на теорията на вероятностите са анализите на смъртността. Тук обаче целта ми е не толкова да критикувам учебника, а да покажа (за кой ли път) недопустимостта на условните решения при разнопосочните промени на два и повече фактора във всички приложни статистики. В цитирания учебник на с. 70 - 73 е изложен метод, назован „адитивен индексен анализ”, с който разликата в общия брой на умрелите за два периода (базисен и отчетен) се разлага общо на 7 компонента (ефекта - бел. м.) с данни за повъзрастовата и общата смъртност, общия брой на населението и неговата възрастова структура. Компонентите се получават с два варианта на изложения метод, първият от които е с тегла от базисния период, а вторият - с тегла от отчетния период. Няма да обсъждам формулите за всеки един от седемте компонента, но ще обосновa моето несъгласие с него поради явното му противоречие с теорията на вероятностите. За тази цел е достатъчно да се покажат ефектите от промените на двата основни фактора $\Delta\overline{m} = \overline{m}_2 - \overline{m}_1$ (в статията $\overline{m}_1$ и $\overline{m}_0$ - бел. м.) за общата смъртност през отчетния и базисния период и $\Delta S = S_2 - S_1$ (в статията S_1 и S_0 - бел. м.) за общия брой на населението за тези периоди. Според автора и с двата варианта на метода се получава един и същ положителен съвместен прираст на умрелите от съвместните промени на общия брой на населението, неговата повъзрастова смъртност и възрастова структура! Във фиг. 1 доживелите l_x^2 могат да се заменят с населението S_2 за отчетния период и l_x^1 с населението S_1 за базисния период. По аналогичен начин могат да се заменят и вероятностите за умиране q_x^1 за базисния период с коефициента за общата смъртност $\overline{m}_1$ и вероятността q_x^2 за отчетния период с коефициента $\overline{m}_2$. При тези условия методът на проф. Б. Русев е верен само за случая (б) с положителния съвместен прираст на умрелите от увеличението на общата смъртност с $\Delta\overline{m} > 0$ и увеличението на населението с $\Delta S > 0$. За останалите три случая на фиг. 1 обаче той се разминава тотално с теорията на вероятностите. В учебника няма приложение на метода с пример. Такъв пример е анализиран в отделна статия на автора с фактически данни за умрелите в страната, броя на населението, неговата възрастова структура и повъзрастова смъртност в пет големи възрастови интервала (4 петнадесетгодишни от 0 до 59 навършени години и един за възрастовия интервал 60 и повече години) за 2000 и 2007 г. (Русев, 2009). Получени са две различни решения, всяко от които е със 7 компонента (ефекта) от двата варианта на метода, но без да е посочено кой от тях се предлага за решение. Според мен и двете решения са неверни, защото примерът представлява случаят (г) на фиг. 1 в настоящата статия, в който няма съвместен ефект. Според данните за основните показатели в примера броят на умрелите (зависимата дискретна променлива) е намалял от $M_1 = 115087$ през 2000 г. на $M_2 = 113004$ умрели през 2007 г., или $\Delta M = -2083$ умрели. Общата смъртност (едната дискретна факторна променлива) се е увеличила от $\overline{m}_1 = 14{,}1‰$ на $\overline{m}_2 = 14{,}8‰$ или $\Delta\overline{m} = 0{,}7‰$, докато броят на средногодишното население (другата дискретна факторна променлива) е намаляла от $S_1 = 8170$ хил. на $S_2 = 7660$ хил., или с $\Delta S = -510$ хил. души. Следователно примерът е точно случаят (г) на фиг. 1, защото двата фактора са с разнопосочни промени - смъртността се е увеличила, а населението е намаляло и поради това няма никакъв съвместен ефект. От решенията с метода на проф. Русев обаче и с двата варианта се получава един и същ положителен съвместен ефект от увеличение на умрелите през 2007 г. поради увеличението на смъртността с $\Delta\overline{m} > 0$ и от липсващото население $\Delta S < 0$ (Русев, 2009, с. 61). В теорията на вероятностите обаче няма такъв случай от липсваща среда (население) да произлизат събития (умрели)! От подробното еднозначно и точно решение на този пример с математическия сигнум се получават само 4 ефекта, защото три от седемте ефекта с метода на проф. Русев образуват несъществуващия съвместен ефект sgn $\Delta\overline{m}\Delta S = 0$. Ако читателят желае, може да реши този пример с формулите в моята статия за еднозначни решения от адитивния факторен анализ на еднородни съвкупности, публикувана в сп. „Статистика”, кн. 1 - 2/2010.

3. Факторни модели за прякото и косвеното влияние на повъзрастовата смъртност

На следващия и последен етап се намират необходимите обратни разлики за броя на преживелите $\Delta d'_{x,q}$ от прякото влияние на смъртността и $\Delta d'_{x,l}$ от нейното косвено влияние във възрастовия интервал *x, x* + 1 години. Те са крайната цел на факторния анализ и могат също да се покажат и интерпретират на фиг. 1. По-конкретно, случаят (а) е със следните брутни ефекти за преживелите:

$br\Delta d'_{x,q} = \Delta d'_{x,q} + \Delta d'_{xqq} = \left(q_x^1 - q_x^2\right) l_x^2 + f_q \left(q_x^1 - q_x^2\right)\left(l_x^1 - l_x^2\right)$, или преживелите от намалението на смъртността $q_x^2 < q_x^1$ в интервала *x, x* + 1 години, и $br\Delta d'_{x,l} = \Delta d'_{x,l} + \Delta d'_{xll} = \left(l_x^1 - l_x^2\right) q_x^2 + f_l \left(q_x^1 - q_x^2\right)\left(l_x^1 - l_x^2\right)$, или преживелите от намалението на умрелите поради по-малкия брой на доживелите l_x^2 спрямо по-големия брой l_x^1 при една и съща по-ниска смъртност q_x^2 в интервала *x, x* + 1 години.

Следващият случай (б), който е обратен на случая (а), е с брутни ефекти за непреживелите:

$br\Delta d'_{x,q} = \Delta d'_{x,q} + \Delta d'_{xqq} = \left(q_x^1 - q_x^2\right) l_x^1 + \left[-f_q\left(q_x^1 - q_x^2\right)\left(l_x^1 - l_x^2\right)\right]$, или непреживелите от увеличението на смъртността във възрастовия интервал *x, x* + 1 години, и

$br\Delta d'_{x,l} = \Delta d'_{x,l} + \Delta d'_{xll} = \left(l_x^1 - l_x^2\right) q_x^1 + \left[-f_l\left(q_x^1 - q_x^2\right)\left(l_x^1 - l_x^2\right)\right]$, или непреживелите от увеличението на умрелите поради по-големия брой на доживелите l_x^2 спрямо по-малкия брой l_x^1 при една и съща по-ниска смъртност q_x^1 в интервала *x, x* + 1 години.

Останалите два случая (в) и (г) на фиг. 1 с разнопосочните промени на смъртността Δq_x и на доживелите Δl_x са без съвместни ефекти. По тази причина те са нетни (чисти) ефекти от преживели и непреживели само от прякото влияние на промените на смъртността Δq_x и само от косвеното влияние на промените на доживелите Δl_x във всеки възрастов интервал *x, x* + 1 години. По-конкретно, случаят (в) е с нетен ефект на преживелите:

$\Delta d'_{x,q} = \Delta q'_x l_x^1 = \left(q_x^1 - q_x^2\right) l_x^1 > 0$ само от намалението на смъртността $q_x^2 < q_x^1$ в интервала *x, x* + 1 години и нетен ефект на непреживелите $\Delta d'_{x,l} = \Delta l'_x q_x^2 = \left(l_x^1 - l_x^2\right) q_x^2 < 0$ само от увеличението на умрелите поради по-големия брой на доживелите l_x^2 спрямо по-малкия брой l_x^1 при една и съща по-ниска смъртност q_x^2 в интервала *x, x* + 1 години.

Обратният случай (г) е с нетен ефект на непреживелите:

$\Delta d'_{x,l} = \Delta q'_x l_x^2 = \left(q_x^1 - q_x^2\right) l_x^2 < 0$ само от увеличението на смъртността $q_x^2 > q_x^1$ в интервала *x,x+1* години и нетен ефект на преживелите $\Delta d'_{x,l} = \Delta l'_x q_x^1 = \left(l_x^1 - l_x^2\right) q_x^1 > 0$ само от намалението на умрелите поради по-малкия брой на доживелите l_x^2 спрямо по-големия брой l_x^1 при една и съща по-ниска смъртност q_x^1 в интервала *x, x* + 1 години.

В заключение, това са точните еднозначни решения с най-подробните ефекти по единични възрасти от прякото и косвеното влияние на смъртността във всеки възрастов интервал *x, x* + 1 години. По-нататък същите ефекти се пренасят в трите факторни модела за общото влияние на повъзрастовата смъртност. Във всеки един от тях броят на преживелите или непреживелите $\Delta d'_x = d_x^1 - d_x^2$ от общото влияние на повъзрастовата смъртност се замества с двата ефекта от нейното пряко и косвено влияние. Или $\Delta d_x^{'}$ се представя с алгебричната сума $\Delta d_{x,q}^{'} + \Delta d_{x,l}^{'}$. Заместването на $\Delta d_x^{'}$ с двата факторни ефекта се извършва според реда на извеждането на факторните модели. Според този ред първият факторен модел за крайните ефекти има следния вид:

За възрастите от x до w години:

$$\Delta T_{x,w} = T_{x,w}^2 - T_{x,w}^1 = \sum_x^w (w+1-x)\Delta d_x^{'} = \sum_x^w (w+1-x)\left(\Delta d_{x,q}^{'} + \Delta d_{x,l}^{'}\right),$$

където $x \neq 0$, и

$$\Delta T_{x,w} = \Delta T_{xw,q} + \Delta T_{xw,l} = \sum_x^w (w+1-x)\Delta d_x^{'} = \sum_x^w (w+1-x)\Delta d_{xw,q}^{'} + \sum_x^w (w+1-x)\Delta d_{xw,l}^{'}.$$

Първата сума $\Delta T_{xw,q} = \sum_x^w (w+1-x)\Delta d_{xw,q}^{'}$ е общият пряк ефект - прираст или намаление на преживените човекогодини от населението през втория (отчетен) период само от прякото влияние на смъртността с разликите $\Delta q_x = q_x^2 - q_x^1$ във възрастовия интервал от x до w години.

Втората сума $\Delta T_{xw,l} = \sum_x^w (w+1-x)\Delta d_{xw,l}^{'}$ е общият непряк ефект - прираст или намаление на преживените човекогодини от населението през втория (отчетен) период само от косвеното влияние на смъртността с разликите на доживелите $\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1$ във възрастовия интервал от x до w години.

За началната възраст $x = 0$ години общите преки и косвени ефекти $\Delta T_{0w,q}$ и $\Delta T_{0w,l}$ се отнасят за прякото и косвеното влияние на смъртността на всички възрасти от 0 до w години:

$$\Delta T_{0w,q} = \Delta T_{0,q} = \sum_{x=0}^w (w+1-x)\Delta d_{x,q}^{'} \quad \text{и} \quad \Delta T_{0w,l} = \Delta T_{0,l} = \sum_{x=0}^w (w+1-x)\Delta d_{x,l}^{'},$$

откъдето $\Delta T_{0w,q} + \Delta T_{0w,l} = \Delta T_{0,q} + \Delta T_{0,l} = \sum_{x=0}^w (w+1-x)\Delta d_x^{'}$. Интерпретацията на $\Delta T_{0,q}$ и $\Delta T_{0,l}$ е идентична на интерпретацията на общите преки и косвени ефекти $\Delta T_{xw,q}$ и $\Delta T_{xw,l}$ в модела за крайните ефекти от възрастта x до последната w година.

За разлика от изложения факторен модел за крайните ефекти броят на преживелите $\Delta d_x^{'}$ от общото влияние на повъзрастовата смъртност в другите два модела също се замества с факторните ефекти $\Delta d_{x,q}^{'}$ и $\Delta d_{x,l}^{'}$, но за възрастите от 0 години до следващите точни възрасти x години или до средните възрасти $x + a_x$ години. По този начин за втория факторен модел с разликите Δl_x за общото влияние на повъзрастовата смъртност най-напред $\Delta d'_x$ се заместват за възрастите от 0 до $m = x$ години:

$$\Delta T_{l,m} = \sum_{x=1}^{m} \Delta l_x = \sum_{x=0}^{m} (m-x)\Delta d'_x = \sum_{x=0}^{m} (m-x)\left(\Delta d'_{x,q} + \Delta d'_{x,l}\right), \text{ откъдето}$$

$$\Delta T_{l,m,q} = \sum_{x=1}^{m} \Delta l_{x,q} = \sum_{x=0}^{m} (m-x)\Delta d'_{x,q} \quad \text{и} \quad \Delta T_{l,m,l} = \sum_{x=1}^{m} \Delta l_{x,l} = \sum_{x=0}^{m} (m-x)\Delta d'_{x,l}\ .$$

Интерпретацията $\Delta T_{l,m,q}$ и $\Delta T_{l,m,l}$ е подобна на общите преки и косвени ефекти $\Delta T_{xw,q}$ и $\Delta T_{xw,l}$ в модела за крайните ефекти.

С обобщението за всички възрасти от една до *w* години вторият факторен модел за прякото и косвеното влияние на повъзрастовата смъртност има следния вид:

$$\Delta T_{lw} = T^2_{l,w} - T^1_{l,w} = \Delta T_0 = \sum_{x=1}^{w} \Delta l_x = \sum_{x=0}^{w} (w+1-x)\left(\Delta d'_{x,q} + \Delta d'_{x,l}\right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{w} (w+1-x)\Delta d'_{x,q} + \sum_{x=0}^{w} (w+1-x)\Delta d'_{x,l}\ , \text{ откъдето}$$

$$\Delta T_{lw,q} = \sum_{x=1}^{w} \Delta l_{x,q} = \sum_{x=0}^{w} (w+1-x)\Delta d'_{x,q} \ \text{ и } \ \Delta T_{lw,l} = \sum_{x=1}^{w} \Delta l_{x,l} = \sum_{x=0}^{w} (w+1-x)\Delta d'_{x,l}\ .$$

Интерпретацията на $\Delta T_{l,w,q}$ и $\Delta T_{l,w,l}$ е идентична на интерпретацията на общите преки и косвени ефекти $\Delta T_{l,m,q}$ и $\Delta T_{l,m,l}$ за възрастите от 0 до m години.

В третия факторен модел с разликите на живеещите ΔL_x във всеки възрастов интервал *x, x* + 1 години заместването на $\Delta d'_x$ от общото влияние на смъртността с двата факторни ефекта $\Delta d'_{x,q}$ и $\Delta d'_{x,l}$ от нейното пряко и косвено влияние е по-сложно. Използва се връзката на ΔL_x с Δl_x от втория факторен модел чрез по-точната формула на $\Delta L_x = \Delta l_x + \Delta d'_x + \Delta a_x d_x$. В нея най-напред се заместват Δl_x и $\Delta d'_x$ за възрастите от 0 до $m = x$ години с факторните ефекти $\Delta d'_{x,q}$ и $\Delta d'_{x,l}$, с които се получава крайният резултат за ΔT_x :

$$\Delta T_x = T^2_x - T^1_x = \sum_{x=0}^{m} \Delta L_x = \sum_{x=0}^{m} \left(\Delta l_x + \Delta d'_x + \Delta a_x d_x\right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{m} \left[(m+1-x)\left(\Delta d'_{x,q} + \Delta d'_{x,l}\right) + \Delta a_x d_x \right].$$

От този израз за ΔT_x се извеждат двата факторни модела за прякото и косвеното влияние на смъртността от 0 до m години:

$$\Delta T_x = \Delta T_{x,q} + \Delta T_{x,l} = \sum_{x=0}^{m} \Delta L_{x,q} + \sum_{x=0}^{m} \Delta L_{x,l} =$$

$$= \sum_{x=0}^{m} (m+1-x) \Delta d'_{x,q} + \sum_{x=0}^{m} \left[(m+1-x) \Delta d'_{x,l} + \Delta a_x d_x \right],$$

откъдето $\Delta T_{x,q} = \sum_{x=0}^{m} \Delta L_{x,q} = \sum_{x=0}^{m} (m+1-x) \Delta d'_{x,q}$

и $\Delta T_{x,l} = \sum_{x=0}^{m} \Delta L_{x,l} = \sum_{x=0}^{m} \left(\Delta l_{x,l} + \Delta d'_{x,l} + \Delta a_x d_x \right)$.

От получените резултати за двата факторни модела $T_{x,q}$ и $T_{x,l}$ се вижда, че прякото и косвеното влияние на смъртността върху разликите ΔL_x от нейното общо влияние могат да се изведат и със следните показатели:

- $\Delta l_{x,q}$ и $\Delta l_{x,l}$ от прякото и косвеното влияние на смъртността от началната възраст 0 години до точните възрасти *x* години;
- двата факторни ефекта $\Delta d'_{x,q}$ и $\Delta d'_{x,l}$ от прякото и косвеното влияние на смъртността във възрастовия интервал *x, x* + 1 години и
- разликата $\Delta a_x d_x = a_x^2 d_x^2 - a_x^1 d_x^1$ между умрелите d_x^2 във възрастовия интервал *x, x*+ a_x^2 години и умрелите d_x^1 във възрастовия интервал *x, x*+ a_x^1 години.

С тези показатели двата факторни модела имат следния вид:

$$\Delta T_{x,q} = \sum_{x=0}^{m} \Delta L_{x,q} = \sum_{x=0}^{m} \left(\Delta l_{x,q} + \Delta d'_{x,q} \right) \text{ и}$$

$$\Delta T_{x,l} = \sum_{x=0}^{m} \Delta L_{x,l} = \sum_{x=0}^{m} \left(\Delta l_{x,l} + \Delta d'_{x,l} + \Delta a_x d_x \right).$$

От втория факторен модел може да се установи, че косвеното влияние на смъртността само в отделния възрастов интервал *x, x* + 1 години е равно на сумата $\Delta d'_{x,l} + \Delta a_x d_x$, откъдето вторият модел може да бъде записан окончателно с израза:

$\Delta T_{x,l} = \sum_{x=0}^{m} \Delta L_{x,l} = \sum_{x=0}^{m} \left(\Delta l_{x,l} + \Delta d'_{x,L} \right)$, където $\Delta d'_{x,L} = \Delta d'_{x,l} + \Delta a_x d_x$ е косвеното влияние на смъртността в отделния възрастов интервал *x, x* + 1 години.

Заедно с прякото влияние на смъртността $\Delta d'_{x,q}$ и косвеното $\Delta d'_{x,L}$ се образува общото влияние на смъртността само във възрастовия интервал върху разликата ΔL_x.

В този вид двата факторни модела са много удобни за интерпретация.

Първата сума $\Delta T_{x,q}$ е прирастът или намалението на преживените човекогодини от населението през втория (отчетен) период от прякото влияние на доживелите $\Delta l_{x,q}$ от възрастта една година до точната възраст *x* години и ефектът $\Delta d^{'}_{x,q}$ от прякото влияние на промяната на смъртността Δq_x във възрастовия интервал *x, x* + 1 години. Втората сума $\Delta T_{x,l}$ е прирастът или намалението на преживените човекогодини от населението през втория (отчетен) период от косвеното влияние на доживелите $\Delta l_{x,l}$ от възрастта една година до точната възраст *x* години и ефектът $\Delta d^{'}_{x,L}$ от общото косвено влияние на смъртността само във възрастовия интервал *x, x* + 1 години.

С обобщението за всички възрасти от 0 до *w* години двата факторни модела за прякото и косвеното влияние на смъртността върху разликите ΔL_x са същите както изложените факторни модели за възрастите от 0 до *x* години. По тази причина съответните факторни модели за целия възрастов интервал на умиране и доживяване от 0 до *w* години е достатъчно да бъдат само представени, без да се интерпретират:

$$\Delta T_{0,q} = \sum_{x=0}^{w} \Delta L_{x,q} = \sum_{x=0}^{w} \left(\Delta l_{x,q} + \Delta d^{'}_{x,q} \right)$$

и $$\Delta T_{0,l} = \sum_{x=0}^{w} \Delta L_{x,l} = \sum_{x=0}^{w} \left(\Delta l_{x,l} + \Delta d^{'}_{x,l} + \Delta a_x d_x \right) = \sum_{x=0}^{w} \left(\Delta l_{x,l} + \Delta d^{'}_{x,L} \right).$$

С тези модели завършва методологичното изследване на общото, прякото и косвеното влияние на повъзрастовата смъртност върху изменението на средната продължителност на живота. Същите модели могат да бъдат сравнени с други многобройни модели и методи, известни за решението на тази задача. Подобно сравнение обаче предполага отделно и много голямо изследване, което до момента не съм извършил. Единственото, което сега мога да направя, е да сравня моите модели с един от най-популярните модели в чужбина и у нас - на известния демограф Ариага (Arriaga, 1984; Preston and others, 2002; Жекова, 2009; Калоянов, 2011). Аналитичният израз на този модел е следният:

$${}_n\Delta_x = \frac{l_x^1}{l_0^1}\left[\frac{{}_nL_x^2}{l_x^2} - \frac{{}_nL_x^1}{l_x^1}\right] + \frac{T_{x+n}^2}{l_0^1}\left[\frac{l_x^1}{l_x^2} - \frac{l_{x+n}^1}{l_{x+n}^2}\right],$$ където ${}_n\Delta_x$ е разликата в средната продължителност на живота, която се дължи на общото влияние на смъртността във възрастовия интервал *x, x* + *n* години.

Ако от този израз отпадне също l_0^1 като константа и се приеме за ширина на възрастовия интервал *n* = 1 година, моделът приема вида, сравним с моите факторни модели чрез разликите ΔL_x:

$\Delta T_x = \left[\frac{L_x^2}{l_x^2} - \frac{L_x^1}{l_x^1}\right] l_x^1 + \left[\frac{l_x^1}{l_x^2} - \frac{l_{x+1}^1}{l_{x+1}^2}\right] T_{x+1}^2$, където първият член на тази сума трябва да бъде директният или пряк ефект само от разликите на вероятностите за умиране $\Delta q_x = q_x^2 - q_x^1$ в отделните възрастови интервали *x, x* + 1 години. Вторият член също е сума от индиректен или непряк ефект (допълнителните човекогодини само в отделния възрастов интервал) и ефект на взаимодействието между общия ефект (прекия и непрекия в отделния възрастов интервал) и общия ефект, който се дължи на общата промяна на смъртността на всички възрасти (Arriaga, 1984; Калоянов, 2011).

За съжаление, не мога да приема тази концепция и този модел. Според важния извод в т. 2 на настоящата статия в изходния факторен модел на таблиците за смъртност $d_{x,x+1} = q_{x,x+1} l_x$, който се основава на теорията на вероятностите, първата разлика между вероятностите за умиране $\Delta q_x = q_{x,x+1}^2 - q_{x,x+1}^1$ за прякото влияние на смъртността $\Delta d_{x,q}$ се отнася за целия възрастов интервал *x, x* + 1 години. В модела на Ариага обаче първата разлика $\left[\frac{L_x^2}{l_x^2} - \frac{L_x^1}{l_x^1}\right]$ представлява разлика между вероятностите за доживяване $P_{x,L}^2 = \frac{L_x^2}{l_x^2}$ и $P_{x,L}^1 = \frac{L_x^1}{l_x^1}$ на доживелите l_x^2 и l_x^1 до средните възрасти $x + a_x^2$ и $x + a_x^1$ години във възрастовия интервал *x, x* + 1 години. С тази разлика може да се измери по-малко пряко влияние на смъртността във възрастовия интервал *x, x* + 1 години чрез разликите ΔL_x. Ако се заместят вероятностите за доживяване $P_{x,L}^2$ и $P_{x,L}^1$ с израз, в който участват техните алтернативни вероятности за умиране $q_{x,L} = 1 - P_{x,L}$ на доживелите l_x до средната възраст на умиране $x + a_x$ години, се получава следната разлика за преживелите от прякото влияние на смъртността: $\Delta q'_{xL} = [p_{xL}^2 - p_{xL}^1] = [(1 - q_{xL}^2) - (1 - q_{xL}^1)] = (q_{xL}^1) - q_{xL}^2)]$. Или с разликата $\Delta q_{x,L}$ за прякото влияние на смъртността Ариага подменя разликата Δq_x за това влияние в интервала *x, x* + 1 години. Тъй като по абсолютна стойност $\Delta q_{x,L} < \Delta q_x$, прякото влияние с метода на Ариага ще бъде много малко, а непрякото влияние много голямо. По мое мнение разликата ($P^2_{x,L}$ - $P^1_{x,L}$) е вярна само за първия възрастов интервал 0 - 1 години. Ефектът от общото влияние на смъртността в него се получава точно с произведението $\Delta P_{0,L} l_0 = (P^2_{0,L} - P^1_{0,L}) l_0 = \Delta L_0$. В останалите възрастови интервали обаче тези ефекти са неясни. Оттук произлиза и моята втора принципна бележка. Не съм съгласен с Ариага, че след като двата ефекта - прекият и непрекият, възниквали само поради промени вътре в отделната възрастова група (интервал - бел. м.), се предполагало, че смъртността в другите групи (интервали - бел. м.) е неизменна (Arriaga, 1984). За каква неизменност може да се говори, след като анализът на ΔT_0 и Δe_0 започва от началния възрастов интервал 0 - 1 години? Според теорията на вероятностите непрекият ефект $\Delta d'_{x,l}$ във всеки възрастов интервал зависи от разликата на доживелите Δl_x до неговата долна граница. От своя страна обаче тази разлика зависи от общото влияние на смъртността от началната възраст 0 години до точната възраст *x* години. В моя факторен модел с разликите Δl_x е показано, че в неговия израз за възрастовия интервал от 0 до $m = x$ години $\Delta T_{l,m} = \sum_{x=0}^{m} \left(m - x \right) \Delta d'_x$ преживелите $\Delta d'_x$ са именно ефектите от общото влияние (пряко и косвено) на смъртността в целия възрастов интервал от 0 до *x* - 1 години, които определят разликата Δl_x . Освен в този модел Δl_x участват и в третия факторен модел с разликите ΔL_x , всяка от които е равна на алгебричната сума $\Delta l_x + \Delta d'_x + \Delta a_x d_x$. След като крайните разлики ΔT_0 и Δe_0 могат да се обяснят с ефектите $\Delta d'_x$, $\Delta d'_{x,q}$ и $\Delta d'_{x,l}$ от общото, прякото и косвеното влияние на смъртността във всеки възрастов интервал, защо трябва да се търси взаимодействие на тази смъртност със смъртността от другите възрастови интервали? Взаимодействие може да има в отделния интервал, но само от еднопосочни промени на смъртността Δq_x и на доживелите Δl_x . Според мен с концепцията и модела на Ариага се извършват преразпределения на влиянията на смъртността, които излизат извън рамките на основната зависимост на таблиците за смъртност $d_x = q_x l_x$. Причината за това преразпределение беше вече посочена - подмяната на разликите Δq_x за прякото влияние на смъртността с по-малките разлики $\Delta q_{x,L}$ за това влияние.

4. Сравнение с фактически данни на факторните модели за общото, прякото и косвеното влияние на повъзрастовата смъртност с модела на Ариага

Най-простото сравнение, което може да се направи между моите факторни модели с разликите ΔL_x и модела на Ариага, е с два примера. Те са от таблиците за смъртност на мъжете и жените в страната през периода 2003 - 2005 г. на НСИ. Същите таблици за смъртност са избрани по няколко причини. Първата е, че с тях са показани двата примера за анализ на Δe_0 на мъжете и жените с метода на Ариага, публикуван за пръв път у нас в учебник по демографска статистика (Жекова, 2009, с. 196 - 197). Втората причина е, че е избрана за анализ разлика между две средни продължителности на живота на мъжете и жените за един и същ период, а не анализ в динамичен аспект на средни продължителности на живота за базисен и отчетен период. Както бе посочено, анализът в динамичен аспект може да подведе много лесно всеки, който използва методи за условни решения, например тези на проф. Б. Русев, които влизат в противоречие с теорията на вероятностите (Христов, 2012). Третата причина за избора на двете таблици за смъртност е, че вероятностите за умиране на мъжете са по-големи от вероятностите за умиране на жените на всички единични възрасти от 0 до w = 100 години с единствено изключение във възрастовия интервал 4 - 5 години. С моите модели анализът на Δd_4 е според случая (б) на фиг. 1, докато анализът на всички Δd_x за останалите възрасти е според случая (в) на същата фигура. Това предполага, че голямата разлика между средните продължителности на живота на жените и мъжете с $\Delta e_0 = e_0^2 - e_0^1 = 76,34 - 69,02 = 7,32$ години повече за жените може да се обясни с положителните ефекти $\Delta d'_{x,q}>0$ за преживелите жени от прякото влияние на смъртността във всички единични възрастови интервали $x, x+1$ години (с единствено изключение в интервала 4 - 5 години). Същото пряко влияние произлиза от разликите $\Delta q_x = (q_x^2 - q_x^1) < 0$ поради по-малките вероятности за умиране на жените q_x^2. Другото косвено влияние $\Delta d'_{x,l}$ е броят на непреживелите жени във възрастовите интервали, които произлизат от по-големия брой на умрелите жени само поради разликите на доживелите $\Delta l_x = (l_x^2 - l_x^1) > 0$ при по-ниските вероятности за умиране на жените q_x^2. Общият брой на всички непреживени човекогодини за жените от разликите Δl_x обаче е по-малък от прираста на преживените човекогодини от прякото влияние на смъртността, с който се получава голямата разлика $\Delta e_0 = 7,32$ години в полза на жените (Жекова, 2009, с. 196 - 197). С метода на Ариага се получават други резултати. Например според двата примера в учебника на д-р Жекова ефектът в първия пример от общото влияние на смъртността за възрастовия интервал 15 - 19 години е ${}_5\Delta_{15} = 7725$ повече преживени човекогодини от жените. В него прекият ефект е 260 човекогодини, докато останалият ефект (непрекият в същия възрастов интервал 15 - 19 години и ефектът от т.нар. взаимодействие според модела на Ариага) възлиза на 7 465 повече преживени човекогодини от жените. Според моите факторни модели с разликите ΔL_x обаче се получават съвсем различни резултати. Според тях ефектът от общото влияние на смъртността за този възрастов интервал е много по-малък, защото е само $\Delta L_{15-19} = 2722$ повече преживени човекогодини от жените. Според точната формула за L_x в единичните възрастови интервали този прираст е равен на алгебричната сума $\Delta l_{15-19} + \sum_{x+15}^{19} \Delta d_x^{'} + \sum_{x+15}^{19} \Delta a_x d_x$, която с конкретните числа от примера е $\Delta L_{15-19} = 2657 + 130 + (-65) = 2657 + 65 = 2722$ повече преживени човекогодини от жените в петгодишния интервал 15 - 19 години. Интерпретацията на този резултат е, че 2 657 от преживените повече човекогодини на жените се дължат само на общото влияние на смъртността (прякото и косвеното) от началната възраст 0 години до $x = 15$ години (долната граница на възрастовия интервал 15 - 19 години), т.е. само от влиянието на смъртността до този интервал. Другият ефект от 65 и повече преживени човекогодини за жените се дължи на общото влияние на смъртността, но само в този възрастов интервал (15 - 19 години). Или ефектът ΔL_{15-19} зависи от общото влияние на смъртността в целия възрастов интервал от 0 до 20 години. По-нататък с двата факторни модела за прякото и косвеното влияние на смъртността в целия възрастов интервал 0 - 20 години ефектът ΔL_{15-19} се подразделя на пряк и косвен ефект. Прекият ефект е $\Delta L_{15-19,q} = \Delta l_{15-19,q} + \sum_{x=15}^{19} \Delta d_{x,q}^{'} = 2668 + 131 = 2799$ повече преживени човекогодини от жените. Неговата интерпретация е, че 2 668 повече преживени човекогодини са само от прякото влияние на смъртността, т.е. само от разликите на вероятностите за умиране $\Delta q_x = q_x^2 - q_x^1$ на отделните възрасти в интервала 0 - 15 години. Останалите 131 повече преживени човекогодини от жените са също от прякото влияние на смъртността поради разликите Δq_x, но само във възрастовия интервал 15 - 19 години. Или общото пряко влияние на смъртността $\Delta L_{15-19,q}$ е от разликите на смъртността Δq_x за всички възрасти в интервала 0 - 20 години. По аналогичен начин се интерпретира и ефектът $\Delta L_{15-19,l}$ от общото косвено влияние на смъртността в същия възрастов интервал 0 - 20 години. Според неговата точна формула $\Delta L_{15-19,l} = \Delta l_{15-19,l} + \sum_{x=15}^{19} \Delta d'_{x,l} + \sum_{x=15}^{19} \Delta a_x d_x = \Delta l_{15-19,l} + \sum_{x=15}^{19} \Delta d_{15-19,L}$, с числата от примера $\Delta L_{15-19,l} = -11 + (-1) + (-65) = -11 - 66 = -77$ по-малко са преживените човекогодини от жените поради общото косвено влияние на смъртността в целия възрастов интервал 0 - 20 години. За разлика от метода на Ариага косвеното влияние на смъртността с моите методи е отрицателно и минимално в сравнение с голямото и положително пряко влияние на смъртността. От общия косвен ефект $\Delta L_{15-19,l} = -77$ по-малко преживени човекогодини от жените само 11 са непреживените човекогодини от това влияние на смъртността в интервала 0 - 15 години. Останалите (-66) човекогодини са от косвеното влияние на смъртността само в интервала 15 - 19 години. Подобни резултати се получават и от следващия пример за възрастовия интервал 55 - 59 години. С метода на Ариага ефектът от общото влияние на смъртността за този интервал е ${}_5\Delta_{55} = 103828$ повече преживени човекогодини от жените. Той се подразделя на пряк ефект от 11 115 повече преживени човекогодини само от прякото влияние на смъртността във възрастовия интервал 55 - 59 години и косвен ефект от останалите 92 713 повече преживени човекогодини от жените. С моите факторни модели обаче се получават други резултати: $\Delta L_{55-59} = 52887$ повече преживени човекогодини от жените във възрастовия интервал 55 - 59 години. От тях $\Delta l_{55-59} = 50741$ са от общото влияние на смъртността във възрастовия интервал от 0 до 55 години, а останалите 2 146 човекогодини са от общото влияние на смъртността само в този петгодишен възрастов интервал 55 - 59 години. По-нататък с факторните модели за прякото и косвеното влияние на смъртността се получават следните ефекти:

$\Delta L_{55-59,q} = \Delta l_{55-59,q} + \sum_{x=55}^{59} \Delta d'_{x,q} = 52610 + 4630 = 57240$ повече преживени човекогодини само от прякото влияние на смъртността в интервала 0 - 60 години. От тях 52 610 човекогодини са от прякото влияние на смъртността във възрастовия интервал 0 - 55 години, докато останалите 4 630 човекогодини са от прякото влияние на смъртността само в този възрастов интервал (55 - 59 години). По аналогичен начин се получават и ефектите от косвеното влияние на смъртността за същия възрастов интервал:

$$\Delta L_{55-59,l} = \Delta l_{55-59,l} + \sum_{x=55}^{59} \Delta d'_{x,l} + \sum_{x=55}^{59} \Delta a_x d_x = -1869 + (-338) + (-2146) =$$

$$= -1869 - 2484 = -4353$$

непреживени човекогодини от жените. От тях (-1 869) човекогодини са непреживени само от косвеното влияние на смъртността от 0 до 55 години, а останалите (-2 484) човекогодини са от косвеното влияние само във възрастовия интервал 55 - 59 години. Накрая, със сумата на разликите ΔL_x за всички единични възрасти от 0 години до последната w = 100 години се получава по-големият брой на преживените човекогодини от жените с $\Delta T_0 = 731596$ човекогодини в сравнение с преживените човекогодини от мъжете. Съответният факторен ефект от прякото влияние на смъртността за всички възрасти е $\Delta T_{0,q} = \sum_{x=0}^{100} \Delta L_{x,q} = 1644005$ повече преживени човекогодини от жените само поради техните по-малки вероятности за умиране на всички възрасти без съвсем малкото и незначително влияние на смъртността в интервала 4 - 5 години. Другият факторен ефект от косвеното влияние на смъртността също за всички възрасти е $\Delta T_{0,l} = \sum_{x=0}^{w} \Delta L_{x,l} = -912409$ непреживени човекогодини от жените само поради техния по-голям брой умрели от по-големия брой на доживелите l_x^2 в сравнение с по-малкия брой на доживелите мъже l_x^1 на отделните възрасти. Или както можеше да се очаква, получените резултати с моите факторни модели показват, че по-големият брой на всички преживени човекогодини от жените с $\Delta T_0 = 731596$ човекогодини и тяхната по-голяма средна продължителност на живота с $\Delta e_0 = \frac{\Delta T_0}{l_0} = 7,32$ години произлизат само от преобладаващото пряко влияние на смъртността поради техните по-малки вероятности за умиране на всички възрасти. При тези условия на задачата е недопустимо според мен косвените ефекти да бъдат положителни и по-големи от преките ефекти, както се получава с модела на Ариага. По тази причина не приемам този модел, нито подобните на него, предложени от други автори.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА:

Калоянов, Т. (2011). Декомпозиция на промените на средната продължителност на предстоящия живот, Население, кн. 1 - 2, С.

Милкоева, Б. (1998). Математически справочник, МОН, С.

Русев, Б. (2009). Един подход за адитивен индексен анализ, Икономическа мисъл, кн. 5, С.

Русев, Б. (2010). Отново за „Измерване влиянието на повъзрастовата смъртност върху средната продължителност на живота”, Статистика, кн. 1 - 2, С.

Русев, Б., З. Сугарев (2008). Демографска статистика. Университетско издателство „Стопанство”, УНСС, С.

Сугарев, З., Б. Русев (1992). Демографска статистика, Университетско издателство „Стопанство”, УНСС, С.

Христов, Е. (1978). Прирастът на продукцията според промените във вложеното количество труд и производителността на труда, Статистика, кн. 5, С.

Христов, Е. (2004а). Факторен анализ на прирасти на абсолютни резултативни величини с реални нетни и брутни ефекти, Икономическа мисъл, кн. 3, С.

Христов, Е. (2004б). Факторен анализ на прирасти на средни равнища с реални нетни и брутни ефекти, Икономическа мисъл, кн. 6, С.

Христов, Е. (2004в). Анализ на изменението на производителността на труда с реални структурни и неструктурни ефекти, Статистика, кн. 6, С.

Христов, Е. (2006). Преходът от адитивен факторен анализ на абсолютни резултативни величини в индексен факторен анализ с реални ефекти, Икономическа мисъл, кн. 2, С.

Христов, Е. (2010а). Еднозначни решения от адитивен факторен анализ с дискретни данни за еднородна и разнородна продукция, Статистика, кн. 1 - 2, С.

Христов, Е. (2010б). Еднозначни решения от индексен факторен анализ с дискретни данни за еднородна и разнородна продукция, Статистика, кн. 3 - 4, С.

Христов, Е. (2012). Факторни модели за общото влияние на повъзрастовата смъртност върху изменението на средната продължителност на живота, Статистика, кн. 1 - 2, С.

Arriaga, E. (1984). Measuring and explaining the change in life expectancies. Demography 21.

Bachman, G., L. Narici (1966). Functonal analyses, Academic Press, N.Y.

Chiang, C. L. (1977). Life Table and Mortality Analyses, World Health Organization, Geneva.

Kreyszig, E. (1993). Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons, N.Y.

Preston, H., P. Heuveline, M. Guillot (2002). Demography: Measuring and Modeling Population Processes. Oxford: Blackwell Publishers.

ФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ОБЩЕГО, ПРЯМОГО И КОСВЕННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ СМЕРТНОСТИ ПО ВОЗРАСТУ НА ИЗМЕНЕНИЕ СРЕДНЕЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

*Емил Христов**

РЕЗЮМЕ В статье представлены основные итоги одного полного и независимого исследования автора, осуществленного в двух частях. Первая изложена в журнале в 2012 году, вып. 1-2, и относится только к измерению общего воздействия смертности по возрасту на разницу Δe_0 между средними продължительностями жизни двух популяций. В целях связи с предыдущей статьей, здесь представлены коротко только наиболее значимые итоги первой части. В ней выведены и обоснованы три факторные модели, в которых разница Δe_0 заменена для удобства анализа разницей ΔT_0 человеко-лет, прожитых двумя популяциями. Три модели выражены новой факторной переменной $\Delta d_x^{'} = d_x^1 - d_x^2$, предложенной автором, о числе переживших возрастовый интервал *x, x+1* лет, являющейся альтернативной (обратной) разнице $\Delta d_x = d_x^2 - d_x^1$, относящейся к табличной численности умерших. Новая переменная $\Delta d_x^{'}$ выведена посредством разниц доживших $\Delta l_x = l_x^2 - l_x^1$. С помощью первой модели $\Delta T_{x,w} = \sum_x^w \left(w+1-x\right)\Delta d_x^{'}$ человеко-лет оценивается доля общего воздействия смертностти $\Delta d_x^{'}$ в отдельных возрастных интервалах с *x* по *w* лет на конечные результаты ΔT_0 и Δe_0. Для целого возрастного интервала с x=0 лет по *w* лет эта модель известна как „модель конечных эффектов”. Вторая факторная модель также выведена с помощью разниц Δl_x, но для возрастных интервалов с 0 по *m* лет: $\Delta T_{l,m} = \sum_{x=1}^m \Delta l_x = \sum_{x=0}^m \left(m-x\right)\Delta d_x^{'}$ Характерно для нее, что $\Delta T_{l,m}$ определяется многократным участием *(m- x)* раз $\Delta d_x^{'}$ с каждого возрастного интервала. Для всего интервала с 0 по *m=w* лет, вторая модель превращается в модель конечных эффектов. Третья факторная модель использует болле точный показатель L_x - число живых в интервале *x, x+1* лет. Используется точная формула Чианга (Chiang) об $L_x = l_x - d_x + a_x d_x$ и ее преимущества по сравнению

* Проф., д-р экономических наук; e-mail: emil_hristov_37@hotmail.com.