ЕЛЕМЕНТАРНИЯТ ФУНКЦИОНАЛЕН АДИТИВЕН И ИНДЕКСЕН ФАКТОРЕН АНАЛИЗ И НЕГОВИТЕ ЕДНОЗНАЧНИ РЕШЕНИЯ С ДИСКРЕТНАТА НЕЧЕТНА ФУНКЦИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ СИГНУМ

Емил Христов[*]

По повод 150 години от множествения индекс на цените на Ласпейрес,
140 години от множествения индекс на цените на Пааше,
Международната година на статистиката - 2013
и 135 години от създаването на българската държавна статистика

Въведение

Отбелязаните годишнини са поводът за тази статия, в която са изведени и обосновани решенията с теоретичен математически критерий на елементарните, специфични и най-важни аналитични задачи на държавната статистика. В статията не се взема отношение към значението и цялостната роля на математиката и теоретичната статистика в приложната дейност, тъй като те са добре известни. Също така не се взема отношение към някои конкретни постижения на математическата статистика, които

[*] Професор, д.ик.н.; e-mail: emil_hristov_37@hotmail.com.

могат да бъдат много полезни в приложната аналитична дейност на държавната статистика, но още не са въведени от Евростат. Вниманието е насочено само към първия и най-елементарен факторен анализ най-напред на разликата между две стойности на всяка дискретна зависима променлива, която може да се представи мултипликативно с произведение на две дискретни факторни променливи. Всички променливи в този анализ са детерминирани (неслучайни) и дискретни (прекъснати) величини, защото се наблюдават изчерпателно и текущо по отделни календарни години. Посоченият факторен анализ е елементарен, защото се извършва с разликите или отношенията (индексите) на две стойности на всяка променлива (зависимата и двете факторни), или на две значения на някакъв признак. Той се прилага за всякакви статистически наблюдавани явления, които се отчитат с абсолютни числа в някакви мерни единици и могат да се представят с произведение на показател за интензивността на явлението през дадена година и показател за средата, от която то произлиза или е свързана с него. Показателят за интензивността на процеса (за краткост интензивен показател) представлява отношение между зависимата променлива и средата (за краткост екстензивен показател или фактор), които се отчитат статистически също с абсолютни числа на някакви натурални единици. От тези определения може да се разбере необходимостта и голямото познавателно значение на елементарния факторен анализ на текущите процеси в икономиката, социалните дейности и демографията. Той може да се прилага на всички равнища на агрегация на статистическата информация - от макроравнище за страната до микроравнище за отделната фирма или населено място. Във връзка с това ще посоча, че математика, математическа статистика и статистика се преподават за нуждите на много различни специалности, но само в икономическите университети има отделна специалност „статистика”. Очевидно е, че първата и най-важна функция, възложена на тази специалност, е да бъде връзка между икономическата теория, конкретните икономически задачи, подходящите методи и производството на необходимата статистическа информация за тяхното решаване. Оттук може да се съди за интердисциплинарния характер на статистическата специалност, която изисква много различни и специфични знания. Те всички обаче са необходими и насочени най-напред към икономически анализи на основата на принципа „разходи - производство - доходи“. По тази причина обсъжданият факторен анализ има пряка и най-тясна връзка с всеки начален анализ, като се започне от счетоводно-финансовия за бизнеса и се стигне до текущите анализи на всички показатели за икономически, социални, демографски и други процеси в страната и нейните териториални поделения. Със същия факторен анализ могат да се анализират и такива всеобхватни и обобщаващи макроикономически системи от показатели с достатъчно подробна статистическа информация като „системата на националните сметки” и „баланса на междуотрасловите връзки” (Христов, 1981).

Елементарният факторен анализ, който се извършва с разлики на стойностите на всяка променлива, е известен като адитивен факторен анализ. Когато анализът се извършва с отношения между двете стойности на всяка променлива, той е известен като индексен факторен анализ (Тотев, 1947, 1955). Двата анализа могат да се обединят в общ елементарен функционален анализ, който за разлика от традиционния математически функционален анализ с непрекъснати променливи работи с дискретни или прекъснати величини. От двете форми на дискретния факторен анализ първична или начална е адитивната, докато индексната форма е производна, тъй като верният и точен индексен анализ може да се изведе и обоснове от точното решение с теоретичен математически критерий на адитивния анализ. Проблемите на дискретния функционален анализ в приложните икономически и социални статистики, в т.ч. демографската, произлизат от неговите условни решения. Специално за адитивния анализ не би трябвало да има такива проблеми, защото неговото неусловно решение е изведено у нас по индуктивен логически път и е публикувано за пръв път през 1978 г. в сп. „Статистика” (Христов, 1978). То е преминало през две публични защити на автора за „доктор“ през 1981 г. и за „доктор на икономическите науки“ през 2001 година. За съжаление, образованието и научно-приложните изследвания не проявиха интерес към него. Учебниците и научно-приложните публикации продължават да се пълнят с условни методи и решения. Единственото вярно решение, което може да се срещне в тях, е за случая с едновременни увеличения на двата фактора, но и то още не е крайното решение. Например при анализ на показатели за отчетната спрямо базисната година условността на решенията идва от неясния избор на базисната или текущата стойност на всеки фактор, с която трябва да се умножи разликата на двете стойности (текущата минус базисната) на другия фактор при определянето на ефекта от неговото влияние. Конкретният проблем е, че решенията са **две,** едното от които е **вярно** и точно (еднозначно), а другото е само формално математически точно, но е логически и методологически **невярно** (Христов, 1978). В учебната литература няма точен критерий за избора на вярното решение, като се твърди, че то зависело от конкретната икономическа задача (Гатев, 1966, 1995). Цитирам само този автор, защото всички останали автори на учебници у нас се съобразяват с него. Посоченото твърдение е необходимо и правилно, но е недостатъчно за избора на вярно решение. Последиците от условните решения са наличието на фиктивни (реално несъществуващи) величини в двата ефекта, които са равни по абсолютна стойност, но са с различни алгебрични знаци. Действително, при сумиране на двата ефекта фиктивните величини се унищожават взаимно и се получава точната разлика за зависимата променлива, но двата отделни ефекта са **неверни.** И ако фиктивните величини могат да се установят аналитично и визуално графично в ефектите от адитивния анализ, те са **скрити** във факторните аналитични индекси на индексния анализ. Оттук произлиза първата и основна цел на настоящата статия. След като известният още от 1978 г. верен адитивен факторен анализ е първичен, тук той е изведен за пореден и последен път с теоретичен математически критерий, който, надявам се, ще сложи край на всички условни решения. Втората цел на статията е да покаже, че с помощта на този критерий се преминава от адитивния анализ в индексен факторен анализ. От обединяването на двата анализа се получават решенията на единния елементарен функционален анализ с дискретните данни. Във връзка с това са направени кратки исторически бележки за развитието на адитивния и индексния анализ у нас, както и на основните причини за техните нерешени проблеми с условните решения. С третата и последна цел на статията се разкрива също с помощта на теоретичния критерий, че еднозначните и точни решения на индексния анализ се получават също, когато се извършва и самостоятелен анализ, без да се преминава от адитивен анализ в индексен. В този случай двата индекса, измерващи влиянието на относителните промени на двата фактора, са от типа на индексите за цените на двамата известни немски индексолози от 19-и век - Ласпейрес (Laspeyres, 1864, 1871) и Пааше (Pahsche, 1874). Тези автори не са стигнали до съвременния индексен анализ, но той започва с техните индекси за цените и съответните за физическия обем на продукцията. С теоретичния математически критерий се определя точно за кои конкретни случаи анализът започва с индекса на Ласпейрес и за кои - с индекса на Пааше. Всички индекси след това се заменят с равни на тях аналитични индекси, които съдържат същите ефекти от адитивния факторен анализ.

С изложения дискретен функционален анализ (адитивен и индексен) се решават два вида модели с два фактора в приложните статистики. Първият е специално за икономическата статистика с мултипликативната зависимост $P = pq$, където P е обемът на произведена или на реализирана, или на някаква друга продукция, който зависи от два фактора - цената p на всяка стока или услуга и нейното натурално количество q. В настоящата статия е представен анализът на изменението на обема на продукцията за елементарния случай на една стока или услуга. Поради големия обем на изследването са изложени само задължителните условия на теоретичния критерий и еднозначните решения на адитивния и индексния факторен анализ на подходящи примери за всичките четири случая на факторни промени на продукцията на една стока. Анализът продължава и ще бъде обобщен в следваща статия поотделно за двата вида съвкупности (еднородна и разнородна) в икономиката общо за всички наблюдавани стоки в примерите, които ще се разгледат веднъж като еднородна съвкупност и втори път като разнородна. Другият вид модели с два фактора е отбелязаната зависимост на дискретната зависима променлива от произведението също на два фактора - **интензивен** за силата на наблюдавания процес през дадена година и **екстензивен,** или величината на средата, от която произлиза зависимата променлива. В този смисъл интензивният фактор може да бъде някаква вероятност както в демографската статистика или да има формата на такава вероятност, ако е някакъв коефициент спрямо средногодишното равнище на екстензивния показател. Именно с интензивния фактор се открива възможността за приложение на теорията на вероятностите в адитивния анализ и извеждането на теоретичния математически критерий за еднозначното решение на този анализ (Христов, 2013). Също поради големия обем на изследването вторият вид модели не се обсъждат в настоящата статия, защото те се решават по аналогичен начин както моделите от първия вид.

Еднозначното решение на адитивния факторен анализ се отнася за четири примера или четири конкретни задачи с възможните комбинации на еднопосочните и разнопосочните промени на двата фактора. Същото еднозначно решение на всяка отделна комбинация или случай се получава аналитично с теоретичния математически критерий и едновременно се извежда геометрично на графика със спазване на принципите на теорията на вероятностите. Според нея например, за да има екстензивен прираст на зависимата променлива (наблюдаваното явление) през отчетната спрямо базисната година, трябва да има прираст и на средата през отчетната година, от която произлиза явлението. Просто и логично условие, но както ще се види, то не се изпълнява с известните условни решения на адитивния и индексния анализ в приложните статистики. По тази причина всяко еднозначно вярно решение се сравнява също аналитично и геометрично с неговото алтернативно условно или невярно решение. Общо всички получени ефекти са еднозначни решения от абсолютната форма на адитивния факторен анализ, изразени в мерните единици на зависимата променлива. След това от абсолютната форма на адитивния анализ се преминава в неговата относителна форма чрез отношенията на всеки ефект към базисната стойност на съответната зависима променлива. Именно с получените верни и точни относителни ефекти за прирасти или намаления на зависимата променлива се съставят двата аналитични факторни индекса. Те образуват елементарен иконометричен модел, защото се получават от сравнения на данни само за отчетната и базисната година. С тях обаче се установява пряка връзка между анализа с дискретните данни и математическия функционален анализ с непрекъснати променливи на иконометричните модели. Решението на индексния факторен анализ съдържа два относителни нетни ефекта със своите алгебрични знаци, получени от произведението на двата аналитични индекса и евентуален съвместен ефект от произведението на двата относителни нетни ефекта, ако те имат едни и същи алгебрични знаци.

1. Кратки исторически бележки за развитието на функционалния адитивен и индексен анализ у нас

Както в другите страни, така и у нас след Втората световна война започва нов етап в развитието на статистиката, и по-специално на функционалния анализ с дискретните данни. До войната са известни и прилагани само индексите с постоянен състав за цените на Ласпейрес и Пааше (Тотев, 1947). Качествено новият етап в развитието на функционалния анализ се характеризира най-напред с отделянето на неговата адитивна форма от индексната и впоследствие утвърждаването й като първа преди индексната форма (Шапкарев, 1950, 1951; Янакиев, 1952, 1954; Стефанов, Тотев, 1960; Цонев, 1968). Характерно за този период е използването на съветския опит, който е бил по-напред от нашия и се е сблъсквал с проблемите на индексния анализ още преди войната (Александровский, 1938; Ежов, 1940; Турецкий, 1941; и други). Първите статистически факторни анализи, които се правят за икономиката на бившия Съветски съюз, а след войната и у нас, са най-много за цялата икономика, нейните отделни отрасли и за отделни промишлени предприятия. Във връзка с тях са и първите учебници за образованието по специалността и първите научно-приложни публикации. Обобщението за този период в бившия Съветски съюз е, че факторният анализ е или само индексен, или по-често е първо индексен и от него след това се преминава в адитивен анализ (Ротштейн, 1947; Савинский, 1949; Югенбург, 1955; Козлов, 1956; и много други). Същият извод може да се направи и за първите български автори след войната (Тотев, 1947, 1948, 1955; Шапкарев, 1950, 1951; Янакиев, 1952, 1954; Станев, С., 1956; Станев, Л., 1956; Наумов, 1959). Според мен този подход, който започва най-напред с индексен анализ, е първата основна причина за неговите нерешени проблеми, защото от първия множествен индекс на цените на Ласпейрес са изминали вече 150 години, а от следващия на Пааше - 140 години. Много е вероятно, че именно поради неудовлетвореност от индексния анализ през същия следвоенен период се появяват и съветски автори, които извършват факторен анализ с обратен подход - най-напред с адитивен, а след това с индексен анализ (Ряузов, Тительбаум, 1951; Сатуновский, 1955; Перегудов, 1959; и други). Тази смяна на подхода може да се обясни и с една много важна практическа цел на анализа - да се определят реалните (фактически) размери на икономиите или преразходите на парични средства, а не на техните условни размери като разлики на факторните индекси. Цитираните автори извършват адитивни факторни анализи на най-срещания случай с едновременни увеличения на двата фактора, например увеличения на производителността на труда на едно заето лице и броя на заетите. Въпреки това подходът е вече друг и по мое мнение той е вече ново (адитивно) направление на елементарния функционален анализ. С новия подход обаче се появява и нов проблем. Той е, че при еднопосочните факторни промени възникват два нетни ефекта и един съвместен, но индексният факторен анализ се извършва само с два аналитични индекса за отделните самостоятелни влияния на двата фактора. От това на пръв поглед „неразрешимо противоречие“ двата аналитични индекса не са излезли и досега. Оттук следва изводът, че подходът, с който дискретният функционален анализ започва направо с индексен анализ, не е довел да еднозначно решение. Първият автор в България, който разграничава адитивния факторен анализ от индексния, е акад. Ив. Стефанов (Стефанов, Тотев, 1960). По-конкретно, той въвежда мултипликативен (индексен) анализ и адитивен факторен анализ под името „специфичен индексен анализ“. Двата анализа се прилагат отделно за еднородна и разнородна съвкупност. За пръв път са въведени и двете форми - абсолютна и относителна - на адитивния факторен анализ. Също за пръв път се предлага пропорционално разпределяне на съвместния ефект с три метода - на Югенбург, Струмилин и Кац. С тези въведения на акад. Ив. Стефанов започва нов етап на функционалния анализ с дискретните данни в нашата статистика. Заедно с него обаче възниква и проблемът, че не е показана точна аналитична връзка между адитивния и индексния анализ. Причината е, че няма още еднозначни решения на двата анализа.

Последният етап в развитието на функционалния адитивен и индексен анализ започва от 1968 г., когато проф. Венец Цонев утвърждава адитивния факторен анализ на първо място с въвеждането на схема за този анализ от съветски източник (Югенбург, 1955; Цонев, 1968, 1970, 1978). След него схемата се използва от доц. Т. Къналиев като изходна основа и за индексен анализ (1977, 1978, 2005, 2006), както и от други автори само за адитивен анализ (Стойкова-Къналиева, 2006). Или схемата вече се възприема като надеждна и изходна основа за следващия индексен анализ. За съжаление обаче, тя е непълна, защото обхваща само три случая на едновременните промени на два фактора. Те са двата случая на разнопосочни промени на факторите, от които единият се увеличава, а другият намалява. Третият случай е за едновременните увеличения и на двата фактора. Или в тази схема липсва четвъртият случай, който е обратен на третия и е с едновременни намаления на двата фактора. В икономическата практика този случай се среща много рядко, но той присъства често в демографската и социалните статистики. Без него обаче схемата вече не може да бъде надежден ориентир не само за индексен, но и за адитивен анализ. Причината е, че тя може да подведе анализаторите в случая с намаления на двата фактора, като ги насочва към решения за обратния случай на едновременни увеличения само със смяна на алгебричните знаци. Както ще се види в следващото изложение, това е недопустимо. В заключение, трудно може да се обясни отсъствието на случая с едновременните намаления на двата фактора в схемата за адитивния анализ. Възможно е този случай да е свързан с тогавашните условия на сталинисткия период в съветската статистика. Ако се отчете, че основен обект на икономическата статистика тогава е бил анализът на производителността на труда, случаят на нейното намаление с едновременното намаление на заетите е бил недопустим. Независимо от посочения недостатък на тази схема българските автори Т. Къналиев и А. Стойкова-Къналиева са стигнали до крайните решения с нея при относителната форма на адитивния анализ (Къналиев, 2006; Стойкова-Къналиева, 2006). За разлика от същата непълна схема, както вече отбелязах, през 1978 г. публикувах всички еднозначни и безусловни решения на адитивния факторен анализ. Те образуват пълната схема, която включва и случая с едновременните намаления на двата фактора, в т.ч. при намаление на производителността на труда в селското стопанство от неблагоприятни природни условия, изчерпване на природните ресурси в добивната промишленост, както и поради други причини (Христов, 1978). До тази схема стигнах независимо от нашите и чуждите автори с помощта на индуктивна логика за всичките четири възможни частни случая на адитивния анализ с два фактора, след което ги обобщих с математическа индукция за общото решение на този анализ не само в икономическата статистика, но и във всички приложни статистики. Най-важните резултати от него са, че съвместни ефекти от двата фактора може да има само от техни еднопосочни промени на увеличение или намаление, докато при разнопосочни промени на факторите няма съвместни ефекти. Този извод е валиден за всички видове анализи - от разликите на абсолютни резултативни величини (зависими променливи) до разликите на техните средни равнища на всички агрегационни нива на информацията. При тези условия предлаганият адитивен факторен анализ се различава от анализите на всички други автори. По мое мнение именно с посочения адитивен анализ отпадат най-важните причини за нерешените проблеми и на индексния анализ.

Друга причина за проблемите на адитивния и индексния анализ е свързана с два различни вида задачи на адитивния анализ. Едната задача е според характера на ефектите от анализа, в смисъл дали се търсят само традиционните два ефекта - интензивен и екстензивен. Другата задача е според „източниците на прираст“ и е въведена от проф. В. Цонев (Цонев, 1970). С тази задача за източниците могат да се измерят следните три ефекта: интензивен ефект от онова количество на екстензивните единици през отчетната година, което е равно на тяхното количество през базисната година; екстензивен ефект от допълнително количество единици през отчетната година и интензивен ефект от същото допълнително количество единици. Двете задачи са свързани със съвместните ефекти и на практика много често се бъркат една с друга. Ако има съвместен ефект при първата задача, няма никакъв проблем нито за адитивния, нито за индексния анализ, защото той може да се отнесе към нетния интензивен ефект или да се разпредели пропорционално между двата нетни ефекта, или да остане като отделен ефект. Точното решение на втората задача обаче изисква допълнителна и специална информация за ефектите от двете количества на екстензивните единици през отчетната година. Ако няма такава информация, съвместният ефект може да се разпредели пропорционално между двата нетни ефекта. Във връзка със съвместния ефект искам да отбележа, че в моята последна статия за адитивния факторен анализ от 2010 г. предложих задължително пропорционално разпределяне на този ефект само за нуждите на индексния анализ (Христов, 2010а). Сега се отказвам от това разбиране, защото последната цел на всеки анализатор е да получи ефекта от цялото влияние на всеки фактор, а не само неговия нетен ефект. Това е особено важно за икономическите статистики, в които зависимите променливи са в паричен израз. След пропорционалното разпределяне на съвместния ефект се съставят брутни ефекти, които съдържат нетните ефекти и съответните пропорционални части на съвместния ефект. В моята последна статия за индексния факторен анализ също през 2010 г. предложих крайното решение на двата аналитични индекса за разнородна продукция да се определя с корекция, получена с квадратно уравнение (Христов, 2010б). От него също се отказвам, защото то се отнася за частни случаи и е математически формално. Стигнах до извода, че общото теоретично решение на адитивния и индексния факторен анализ трябва да се представя с теоретичен математически критерий. Именно с този критерий свързвам последното развитие на функционалния анализ у нас, тъй като преди десет години въведох параметъра h за съвместния ефект в адитивния факторен анализ (Христов, 2004а, 2004б). С него се установява наличието или отсъствието на такъв ефект, както и неговият алгебричен знак. В последно време изведох същия параметър с помощта на теорията на вероятностите при решението на задача от демографската статистика (Христов, 2013). От направената литературна справка се оказа, че h е нечетната дискретна функция на математическия сигнум, т.е. представлява теоретичен математически критерий за факторен анализ. С този теоретичен критерий излагам общото и окончателно решение на адитивния и на индексния анализ с два фактора.

Направеното изложение на развитието на индексния факторен анализ у нас би било непълно, ако не се вземе под внимание и развитието на индексната теория в западните страни. В исторически аспект тя се е развивала по-скоро като индексна теория на цените. В този аспект ще отбележа само най-важната връзка с нея на по-общата тема на настоящата статия за приложението на елементарния факторен анализ не само за продукцията на стоки, но и на най-различни показатели с два фактора във всички приложни статистики. В това отношение съм много улеснен от книгата на известния английски статистик Д. Миллс, в превод на руски език „Статистические методы”, за най-важните прилагани в практиката индекси до 60-те години на миналия век, както и от съдържателната и обобщаваща статия на проф. В. Цонев „Теория на индексите и нейната статистическа алтернатива” (Миллс, 1958; Цонев, 1998). В тази статия са представени накратко основните етапи в развитието на индексната западна теория на цените от началото на 18-и век до началото на 21-ви век. Първият период според определението на проф. Цонев е предфишерианският от началото на 18-и век до втората половина на 19-и век. Той обхваща първите опити за отчитане на динамиката на цените без връзка с настъпилите промени в продадените количества на стоките (Флитууд, 1703; Дюто, 1738; Джевънз, 1763; Карли, 1764; и други). Този период завършва през 60-те години на 19-и век с появата на индексите с постоянен състав на Ласпейрес (1864) и Пааше (1874), с които се отчитат и количествата на стоките. Тук е много важно да се отбележи, че с тези индекси светът работи и до днес, и както читателят ще види от по-нататъшното изложение в настоящата статия, това не е случайно. Вторият период от развитието на индексната теория е фишерианският, по името на американския индексолог Ирвинг Фишер (1922). Той започва от края на 19-и век и завършва условно до втората половина на 20-и век. Характеризира се с многобройни изисквания (тестове) спрямо индексите, някои от които са противоречиви или неизпълними. В последна сметка за нуждите на практиката този автор е въвел формално геометрично осредняване на индексите на Ласпейрес и Пааше, докато други автори - формално аритметично осредняване (Еджуърт, Боули и други). С цел да се намали броят на тестовете, както и да отпаднат противоречивите от тях, идва следващият период или етапът на аксиоматизацията. Индексите през този период се тестират с много по-малък брой независими и съвместими математически аксиоми (Айххорн и Фьолер, 1976, 1983; Вартия, 1985; Дайуърт, 1976, 1987; и други). Въпреки по-малкия брой строги математически условия обаче не се е стигнало до еднозначно решение на индексния анализ. Последният период е от последната четвърт на миналия век и вероятно продължава до днес. Той е определен от проф. Цонев като етап на характеризация на индексите. Търси се единствена формула, която да се приеме с консенсус и да удовлетворява определени строги математически условия (Алън, 1975; Функе и Фьолер, 1979; Фогт, 1981; Балк, 1985, 1995; Глайснер, 1990; и други).

От отбелязаните съвсем накратко етапи в развитието на индексната теория могат да се направят два основни извода. Първият е, че няма още общоприето еднозначно решение на индексния факторен анализ. Според втория извод обаче още през втората половина на 19-и век са съставени два индекса за цените - на Ласпейрес и Паааше, с които се измерват относителните промени на цените с базисните или с текущите натурални количества на стоките. По този начин се открива възможността за измерване на **нетните ефекти** (промени на продукцията) само от измененията на цените. Към това кратко изложение трябва да се добавят индексната теория и съответният индексен факторен анализ на проф. Цонев (1984, 1998). С тях той е направил опит да реши всички икономически и аналитични проблеми на индексния факторен анализ на продукцията от разнородна съвкупност на различни стоки. За тази цел е въвел нов показател - „елементарни потребителски единици” на всяка различна стока, които заедно с нейната цена са фактори в индексния анализ на продукцията. По мое мнение това е друга, специфична задача на индкесния факторен анализ, която е едновременно близка и различна от традиционната задача за измерване на влиянието на относителните промени на двата фактора p и q на отделната стока върху относителеното изменение на нейната продукция P. Както беше отбелязано, с традиционния индексен анализ могат да се решават всякакви задачи за изменението на показатели като зависими променливи от промените на мултипликативно свързани фактори. От въведената по-рано (през 1968 г.) схема на проф. Цонев за адитивния факторен анализ обаче се установи, че при двата нейни случая има само два нетни ефекта, а при третия има и съвместен ефект освен двата нетни. Оттук възниква естественият въпрос защо верните принципи и получените ефекти от този анализ не са преминали и в следващия традиционен индексен анализ? Следвайки тази логика, по-нататъшното изложение на настоящата статия започва именно с най-големия принос на проф. Цонев за началната и определяща роля на адитивния факторен анализ.

2. Адитивен факторен анализ на обема на продукцията на една стока от промените на нейната цена и натурално количество

С цел да се сравнят решенията на адитивния и индексния факторен анализ, получени с теоретичния математически критерий, както и резултатите от предлагания индексен анализ с тези от традиционния с индексите на Ласпейрес и Пааше, е избран за анализ моделът $P = pq$. Цената p в този модел е известна като качествен показател и изразява величината на стойността на единичната стока в паричен израз, независимо дали е производствена, пазарна, сравнима, или някаква друга цена. Тези цени се използват само за нуждите на икономическия анализ, докато за статистическия всяка от тях е текуща за отчетна година или период и базисна (базова) цена за базисна година или период. Каквато и да е цената обаче, тя няма отношение към аналитичното решение на факторния анализ. Цената p и количеството q на стоката измерват нейните две фундаментално различни стойности: p е оценка на стойността на единичната стока в паричен израз, а q е оценка на потребителната стойност на същата стока чрез броя на нейните натурални единици за задоволяване на определени потребности. От математическа гледна точка двата показателя p и q се изразяват с две крайни множества (признаци) на два различни вида единици: парични (левове) на цената и броя на отделните екземпляри или единици на стоката в съответната натурална мярка. Възприет е анализът на продукцията само на една стока, за да се установят най-напред строгите условия и критерии за точни и единствени (еднозначни) решения на дискретния анализ според теоретичната математика и статистика. След това те могат да се обобщят за цялата статистическа съвкупност на всички наблюдавани стоки.

Задачата на адитивния факторен анализ е да се разложи промяната или разликата $\Delta P = P_1 - P_0$ на стойностната маса на стоката през дадена отчетна година P_1 и стойностната маса на същата стока през друга предходна или базисна година P_0 на две части или ефекта. Единият е ΔP_p от промяната (разликата) на цената $\Delta p = p_1 - p_0$, а другият ефект е ΔP_q от промяната (разликата) на натуралното количество $\Delta q = q_1 - q_0$. За тази цел се използва условен пример с четири стоки, всяка от които се характеризира с един от четирите вида едновременни промени на двата фактора *p* и *q*. Четирите вида промени се задават с условията $\Delta p > 0$ и $\Delta q > 0$ или $\Delta p < 0$ и $\Delta q < 0$ за еднопосочните промени на двата фактора и с условията $\Delta p > 0$ и $\Delta q < 0$ или $\Delta p < 0$ и $\Delta q > 0$ за разнопосочните промени. Най-напред за всяка стока се извършва адитивен факторен анализ на изменението на нейната продукция за отчетната и базисната година. При еднопосочните факторни промени се получават три ефекта - два нетни ΔP_p и ΔP_q от влиянието на всеки фактор и съвместен ефект в явен вид ΔP_{pq} от съвместното влияние на двата фактора. При разнопосочните промени на факторите има само два нетни ефекта ΔP_p и ΔP_q без съвместен ефект. С цел да се съставят двата крайни или брутни ефекта от общото или цялостно влияние на всеки фактор съвместният ефект се разпределя пропорционално между двата нетни ефекта. Всички ефекти (нетни и брутни) съставят **абсолютната форма** на адитивния факторен анализ. От нея се преминава в следващата **относителна форма** на този анализ чрез отношението на всеки ефект към базисната стойност на зависимата дискретна променлива P_0. Всеки относителен ефект показва каква част от общото относително изменение на зависимата променлива - продукцията $\frac{\Delta P}{P_0}$, е прираст или намаление от влиянието на промяната на всеки фактор. Това е първото много важно познавателно значение на относителната форма на адитивния анализ. Освен него тя има и друго много важно значение, защото е изходна форма за следващия индексен факторен анализ.

Вместо използването на схеми за адитивен факторен анализ предлагам неговото теоретично и точно решение да се определя с дискретната нечетна функция на математическия сигнум:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0 = (p_1 - p_0) q_{j\min} + (q_1 - q_0) p_{j\min} + \operatorname{sgn}(p_1 - p_0)(q_1 - q_0) =$$
$$= \Delta p q_{j\min} + \Delta q p_{j\min} + \operatorname{sgn} \Delta p \Delta q,$$

където $q_{j\min}$ е по-малкото количество q_0 от базисната година или q_1 от отчетната година, както и $p_{j\min}$ е по-малката цена p_0 от базисната година или p_1 от отчетната година. Символът *sgn* е за дискретната нечетна функция на математическия *signum* (сигнум) от функционалния анализ с дискретни променливи (Bachman, Narici, 1966; Kreiszig, 1993; Милкоева, 1998; Христов, 2013). Тя взема три стойности: при x<0, *sgn (x)* = -1; при *x* = 0, *sgn (x)* = 0 и при *x*>0, *sgn (x)* = 1. Дискретната нечетна функция *sgn (x)* = 0 показва отсъствие на съвместен ефект при (x = 0) или наличие на такъв ефект при $(x \neq 0)$ с неговия алгебричен знак. При отрицателен съвместен ефект x<0, *sgn (x<0)* = -1, докато при положителен съвместен ефект x>0, *sgn (x>0)* = +1. Същата функция въведох преди десет години с индуктивния логически подход като параметър *h* на знакова функция (sign function) пред съвместните ефекти (Христов, 2004а, 2004б). Едва по-късно разбрах, защото не съм математик по образование, че сигнум функцията е изведена отдавна в теорията на множествата на реалните числа и е известна повече като едно от свойствата на тези числа, а не като нечетна функция (Милкоева, 1998). Тя обаче не се преподава като функция в курсовете по математика, нито в теорията на статистиката във висшето икономическо образование, нито се прилага от математици в икономическите и социалните анализи у нас. От друга страна, не съм никак изненадан, че същата функция е много известна и се прилага отдавна в инженерно-техническите науки и техните приложения в съвременния свят.

Данните от условния пример за приложението на изложената методика са представени в табл. 1. Те са близки до фактическите цени на едни много използвани медицински апаратури. Числата за нея са избрани от данните за минали и различни години така, че да изразяват ясно различията между четирите условни стоки. За по-ясно изложение на анализа данните за всяка стока от табл. 1 са представени и графично на четири фигури. Те не са с пропорционални величини на числата от примерите, а са само символични с достатъчно големи факторни промени и ефекти за лесно възприемане.

1. Цени и натурални количества на стоки и техните влияния върху обемите на продукцията

Стоки	Базисна година			Отчетна година			Ефекти от адитивния анализ			
	p_{i0} хил. лв.	q_{i0} брой	$p_{i0}q_{i0}$ млн. лв.	p_{i1} хил. лв.	q_{i1} брой	$p_{i1}q_{i1}$ млн. лв.	$\Delta p_i q_{im}$ хил. лв.	$\Delta q_i p_{im}$ хил. лв.	$h_i \Delta p_i \Delta q_i$ хил. лв.	$p_{i1}q_{i1} - p_{i0}q_{i0}$ хил. лв.
А	40	40	1,6	80	50	4,0	+1600	+400	+400	+2400
Б	60	50	3,0	50	30	1,5	-300	-1000	-200	-1500
В	50	50	2,5	90	30	2,7	+1200	-1000	-	+200
Г	60	60	3,6	50	70	3,5	-600	+500	-	-100
Общо	53,5	200	10,7	65,0	180	11,7	+1900	-1100	+200	+1000

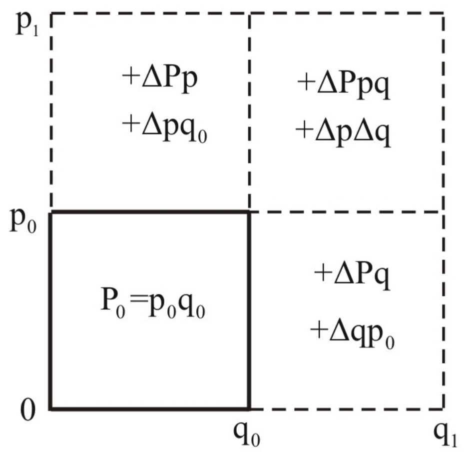
2.1. Адитивен факторен анализ на обема на продукцията на една стока от увеличенията на нейната цена и натурално количество

Първият разглеждан случай е с едновременни увеличения на двата фактора $\Delta p > 0$ и $\Delta q > 0$. Той е един от най-разпространените на практика не само в икономическите, но и във всички приложни статистики. Известен е като единствен от четирите възможни случая на промени на два фактора, адитивният анализ на който се приема за методологически издържан и точен от всички анализатори. Вероятно по тази причина той се среща също като единствен в много учебници и ръководства по статитстика. За съжаление, разпространиха се и такива пособия, особено в последно време, в които няма и следа от най-елементарния, но първия и най-необходим на практиката статистически факторен анализ. Такива учебници и ръководства се съставят предимно от автори, които нямат икономическо образование или ако имат, не приемат условността и противоречията на решенията на елементарния факторен анализ при другите случаи на факторните промени. За запознатия читател този проблем е много стар и приложните икономически и социални статистики все още не могат да го решат. Дори общоприетото решение на адитивния факторен анализ на отбелязания случай с едновременните увеличения на двата фактора не се приема еднозначно от всички при неговото преминаване в решение на индексен факторен анализ. Именно по тази причина изложението на решенията на отделните случаи с едновременните промени на двата фактора започва с общоприетото решение на посочения случай с $\Delta p > 0$ и $\Delta q > 0$. Адитивният факторен анализ обаче тук се извежда с теоретичния критерий -

математическия сигнум *h*, с който се обосновава след това и точното индексно решение. С този подход и критерий са изведени и обосновани и всички останали по-трудни случаи на индексния факторен анализ.

Данните за първия случай с едновременните факторни увеличения са за стоката А в табл. 1 и са означени условно на фиг. 1.

Фиг. 1. Ефекти от едновременните увеличения на цената и натуралното количество на стоката



Общото увеличение на продукцията на стоката е $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1q_1 - p_0q_0 = 80\times 50 - 40\times 40 = 4000 - 1600 = 2400$ хил. лева[1]. Адитивният факторен анализ с математическия сигнум е $\Delta P = \Delta P_p + \Delta P_q + \operatorname{sgn}\Delta P_{pq} = \Delta pq_{\min} + \Delta qp_{\min} + h\Delta p\Delta q$, където $q_{\min} = q_0$, $p_{\min} = p_0$ и $h = +1$, защото $\Delta p = p_1 - p_0 = 80 - 40 = 40$ хил. лв. е увеличение на цената и $\Delta q = q_1 - q_0 = 50 - 40 = 10$ броя е увеличение на количеството на стоката А. При тези условия решението с математическия сигнум е:

$$\Delta P = \Delta P_p + \Delta P_q + \operatorname{sgn}\Delta P_{pq} = \Delta pq_0 + \Delta qp_0 + 1\times\Delta p\Delta q = 40\times 40 + 10\times 40 + 1\times 40\times 10 =$$
$$= 1600 + 400 + 400 = 2400$$

хил. лева. От тях ΔP_p=1600 хил. лв. е нетният ефект (увеличение на продукцията) само от увеличението на цената на стоката А с Δp= 40 хил. лв., ΔP_q= 400 хил. лв. е нетният ефект (увеличение на продукцията) само от увеличението на натуралното количество

[1] За по-голяма точност резултатите от анализа са в хил. левове вместо в млн. левове.

на стоката с $\Delta q = 10$ броя, а $\operatorname{sgn}\Delta P_{pq} = 400$ хил. лв. е съвместният ефект (увеличение на продукцията) от едновременните увеличения на цената $\Delta p > 0$ и на натуралното количество $\Delta q > 0$. Това по мое мнение е само едно първоначално решение, което беше отбелязано като общоприето от всички анализатори. Освен него обаче има и второ окончателно решение с два брутни ефекта. То не се приема от всички, но според мен е единственото методологически издържано и целенасочено решение. Причината е, че крайният интерес при икономическите задачи е насочен не само към нетния ефект, но и към общия или цялостен ефект в стойностен (паричен) израз от влиянието на всеки фактор върху общото изменение на зависимата променлива в стойностния (паричен) израз. Брутните ефекти се съставят с пропорционално разпределяне на съвместния ефект ΔP_{pq} между двата нетни ефекта ΔP_p и ΔP_q. Другият метод за пропорционално разпределяне е чрез относителните факторни промени спрямо базисните стойности на факторите. В разглеждания случай относителните факторни промени са $\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{80-40}{40} = 1$ и $\frac{\Delta q}{q_0} = \frac{50-40}{40} = 0{,}25$ (фиг. 1). Вземат се относителните, а не абсолютните факторни промени, защото факторите p и q са в различни мерки и само относителните промени показват точно различните величини на техните влияния. Точното различие на относителните промени се задава с тяхното отношение, например на по-голямата към по-малката промяна, или обратно. За разглеждания пример това отношение е $\frac{1{,}00}{0{,}25} = 4$ и показва, че съвместният ефект ΔP_{pq} трябва да се раздели на пет равни части, едната от които да се отнесе към по-малкия нетен ефект, а другите четири части да отидат към по-големия нетен ефект. С числата от примера $\frac{\Delta P_{pq}}{5} = \frac{400}{5} = 80$ хил. лева. Тази една пропорционална част се означава с $\Delta P_{pqq} = 80$ хил. лв., защото отива към малкия нетен ефект $\Delta P_q = 400$ хил. лева. Заедно с него се образува брутният ефект $br\Delta P_q = \Delta P_q + \Delta P_{pqq} = 400 + 80 = 480$ хил. лв. от общото или цялостно влияние на фактора q. Общата сума на останалите четири пропорционални части от съвместния ефект се означава с $\Delta P_{pqp} = 4 \times 80 = 320$ хил. лв. и отива към големия нетен ефект $\Delta P_p = 1600$ хил. лева. Заедно с него се образува брутният ефект $br\Delta P_p = \Delta P_p + \Delta P_{pqp} = 1600 + 320 = 1920$ хил. лв. от общото или цялостното влияние на другия фактор - цената p на стоката. Сумата на двата брутни ефекта е $br\Delta P_q + br\Delta P_p = 480 + 1920 = 2400$ хил. лв., или е точно равна на увеличението на продукцията с $\Delta P = 2400$ хил. лева. За пропорционалното разпределяне на съвместни ефекти е известен и по-лесен метод (Христов, 2013). При него се използват направо относителните дялове на двата нетни ефекта: $f_p = \dfrac{\Delta P_p}{\Delta P_p + \Delta P_q} = \dfrac{1600}{1600 + 400} = 0{,}80$ и $f_q = \dfrac{\Delta P_q}{\Delta P_p + \Delta P_q} = \dfrac{400}{1600 + 400} = 0{,}20$. С тези относителни дялове се разпределя съвместният ефект в същото отношение $\dfrac{0.80}{0.20} = 4$ както с относителните факторни промени: $\Delta P_{pqp} = f_p \Delta P_{pq} = 0.80 \times 400 = 320$ хил. лв. и $\Delta P_{pqq} = f_q \Delta P_{pq} = 0.20 \times 400 = 80$ хил. лева. Този метод за разпределяне на съвместните ефекти от адитивния факторен анализ е предложен за пръв път у нас от проф. Алберт Аврамов (Станев, Аврамов, 1983).

Всички получени нетни и брутни ефекти съставят абсолютната форма на адитивния факторен анализ. При нея се работи с разлики на стойностите на зависимата променлива и на отделните фактори, докато отделните ефекти са части от изменението на зависимата променлива $\Delta P = P_1 - P_0$ също в абсолютен израз. Както беше отбелязано, тази форма на анализа има много голямо самостоятелно или собствено познавателно значение при икономическите задачи, защото всички ефекти имат паричен израз. По-нататък от нея може да се премине в елементарен иконометричен модел, при който всеки ефект - нетен и брутен, се отнася към съответната факторна промяна. В разглеждания случай например елементарният иконометричен модел е $\Delta P' = \dfrac{\Delta P_p}{\Delta p} + \dfrac{\Delta P_q}{\Delta q} + h\dfrac{\Delta P_p}{\Delta p} \times \dfrac{\Delta P_q}{\Delta q}$, където $\Delta P'$ е изменението на зависимата променлива за единица промяна на цената p и на количеството q според техните натурални мерки. Без да развивам повече тази идея, искам да обърна внимание, че посоченият модел е най-елементарен и от него може да се премине в по-сложни иконометрични модели с непрекъснати променливи. Всички проблеми и решения на адитивния факторен анализ обаче преминават на по-високо равнище в такива иконометрични модели с непрекъснати променливи.

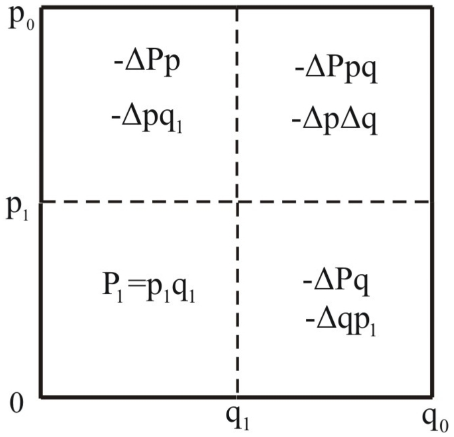
Следващата много важна форма на адитивния анализ е относителната. Според нейната първа много важна функция, както отбелязах, всеки ефект от абсолютната форма на анализа - нетен или брутен, се отнася към базисната стойност P_0 на зависимата променлива. Получените по този начин ефекти са нетните относителни

$\frac{\Delta P_p}{P_0}, \frac{\Delta P_q}{P_0}$ и $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$, както и брутните относителни $\frac{br\Delta P_p}{P_0}$ и $\frac{br\Delta P_q}{P_0}$. С числата от примера нетните относителни ефекти възлизат на $\frac{\Delta P_p}{P_0}100 = \frac{1600}{1600}100 = 100\%$ и $\frac{\Delta P_q}{P_0}100 = \frac{400}{1600}100 = 25\%$, а относителният съвместен ефект $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}100 = \frac{400}{1600}100 = 25\%$. Сумата в проценти на тези ефекти е 100+25+25=150%, или е точно равна на относителното увеличение на продукцията с $\frac{\Delta P}{P_0}100 = \frac{2400}{1600}100 = 150\%$. От своя страна относителните брутни ефекти са $\frac{br\Delta P_p}{P_0}100 = \frac{1920}{1600}100 = 120\%$ и $\frac{br\Delta P_q}{P_0}100 = \frac{480}{1600}100 = 30\%$. Тяхната сума също е равна на относителното увеличение $\frac{\Delta P}{P_0}100$ на продукцията със 150%.

2.2. Адитивен факторен анализ на обема на продукцията на една стока от намаленията на нейната цена и натурално количество

Този случай с едновременните намаления на двата фактора *p* и *q* също е лесен за адитивен факторен анализ, ако се решава с помощта на математическия сигнум *h*, но е по-труден от предходния случай с едновременните увеличения на факторите. Той обаче не се обсъжда в приложните статистики, нито в тяхната теория на статистиката, нито в схемата на проф. В. Цонев за адитивния факторен анализ (Цонев, 1968). Според мен това е главната причина приложните статистики у нас да не достигнат с математическа индукция или с теоретичния критерий (математическия сигнум) до общото теоретично решение на адитивния и индексния факторен анализ. Примерът за този случай е със стоката Б в табл. 1 и е графично представен на фиг. 2. Данните за този пример обаче се различават от данните на предходния пример за стоката А, защото с едни и същи числа при разменени места на двете сравнявани години (базисна и отчетна) се получават едни и същи ефекти по абсолютна стойност, но с обратни алгебрични знаци.

Фиг. 2. Ефекти от едновременните намаления на цената и натуралното количество на стоката



От данните в таблицата и фигурата се определя най-напред общото намаление на продукцията $\Delta P = p_1q_1 - p_0q_0 = 50\times 30 - 60\times 50 = 1500 - 3000 = -1500$ хил. лв., или -1,5 млн. лева. Резултатите или ефектите от адитивния анализ с математическия сигнум на същата разлика ΔP образуват сумата $\Delta P_p + \Delta P_q + \operatorname{sgn}\Delta P_{pq} = \Delta pq_{\min} + \Delta qp_{\min} + h\Delta p\Delta q$, където ΔP_p е нетният ефект - намаление на продукцията само от намалението на цената с $\Delta p = p_1 - p_0$, ΔP_q е нетният ефект - намаление на продукцията само от намалението на натуралното количество на стоката с $\Delta q = q_1 - q_0$ и $\operatorname{sgn}\Delta P_{pq}$ е съвместният ефект - намаление на продукцията от едновременните намаления на цената Δp и на натуралното количество на стоката Δq. От своя страна $\Delta P_p = \Delta pq_{\min}$, където $q_{\min} = q_1$, $\Delta P_q = \Delta qp_{\min}$, където $p_{\min} = p_1$ и $\operatorname{sgn}\Delta P_{pq} = h\Delta p\Delta q$, където h = -1, защото факторните промени са отрицателни, $\Delta p = p_1 - p_0 = 50 - 60 = -10$ хил. лв. е намаление на цената и $\Delta q = q_1 - q_0 = 30 - 50 = -20$ броя е намаление на стоката Б през отчетната спрямо базисната година. При тези условия решението на адитивния факторен анализ е $\Delta P = \Delta P_p + \Delta P_q + \operatorname{sgn}\Delta P_{pq} = -10\times 30 + (-20)50 + (-1)(-10)(-20) = -300 + (-1000) + (-200) = -1500$ хил. лева (фиг. 2). Интерпретацията на получените резултати е $\Delta P_p = -300$ хил. лв. намаление на продукцията само от намалението на цената с $\Delta p = -10$ хил. лв., $\Delta P_q = -1000$ хил. лв. е намаление на продукцията само от намалението на количеството на стоката с $\Delta q = -20$ броя и $\operatorname{sgn}\Delta P_{pq} = -200$ хил. лв. е намаление на продукцията от едновременните намаления на цената с $\Delta p < 0$ и на натуралното количество с $\Delta q < 0$. За крайното решение на адитивния анализ и за следващия индексен факторен анализ е необходимо пропорционално разпределяне на съвместния ефект $\operatorname{sgn}\Delta P_{pq} = -200$ хил. лв. между двата нетни ефекта $\Delta P_p = -300$ хил. лв. и $\Delta P_q = -1000$ хил. лева. Този метод препоръчвам като много по-лесен и за случая с едновременните факторни намаления $\Delta p < 0$ и $\Delta q < 0$. С другия метод трябва да се използват обратните факторни промени $\Delta p > 0$ и $\Delta q > 0$, които произлизат от реципрочните факторни индекси $I_p^{'} = \dfrac{1}{I_p}$ и $I_q^{'} = \dfrac{1}{I_q}$.

За целта с относителните дялове $f_p = \dfrac{\Delta P_p}{\Delta P_p + \Delta P_q} = \dfrac{-300}{-300 + (-1000)} = \dfrac{-300}{-1300} = 0{,}2308$ и $f_q = \dfrac{\Delta P_q}{\Delta P_p + \Delta P_q} = \dfrac{-1000}{-300 + (-1000)} = \dfrac{-1000}{-1300} = 0{,}7692$ се разпределя съвместният ефект $\operatorname{sgn}\Delta P_{pq} = h\Delta p\Delta q = (-1)(-\Delta p)(-\Delta q) = -\Delta p\Delta q = -200$ хил. лв. на двете пропорционални части $\Delta P_{pqp} = (-\Delta p\Delta q) f_p$ и $\Delta P_{pqq} = (-\Delta p\Delta q) f_q$. Първата пропорционална част е $\Delta P_{pqp} = -200 \times 0{,}2308 = -46{,}2$ хил. лв., откъдето общият (брутен) ефект, който се дължи на намалението на цената на стоката, е $br\Delta P_p = \Delta P_p + \Delta P_{pqp} = -300 + (-46{,}2) = -346{,}2$ хил. лева. Другата пропорционална част от съвместния ефект е $\Delta P_{pqq} = -200 \times 0{,}7692 = -153{,}8$ хил. лв., откъдето общият (брутен) ефект, който се дължи на намалението на натуралното количество на стоката, е $br\Delta P_q = \Delta P_q + \Delta P_{pqq} = -1000 + (-153{,}8) = -1153{,}8$ хил. лева. Или общото намаление на продукцията е: $\Delta P_0 = br\Delta P_p + br\Delta P_q = -346{,}2 + (-1153{,}8) = -1500$ хил. лева. Посочените брутни ефекти образуват известния елементарен иконометричен модел чрез отношението на всеки ефект към отделното факторно намаление Δp и Δq, или $\dfrac{br\Delta P_p}{\Delta p}$ и $\dfrac{br\Delta P_q}{\Delta q}$. С числата от примера $\dfrac{br\Delta P_p}{\Delta p} = \dfrac{-346{,}2}{-10} = 34{,}62$ хил. лв. и $\dfrac{br\Delta P_q}{\Delta q} = \dfrac{-1153{,}8}{-20} = 57{,}69$ хил. лева. Интерпретацията на тези решения е, че на 1000 лв. намаление на цената продукцията намалява с 34,62 хил. лв. и едновременно тя намалява още по-силно с 57,69 хил. лв. от намалението на стоката с една натурална единица.

Нека същия пример с едновременните намаления на двата фактора решим като случая в предходната т. 2.1 според известната схема за адитивния факторен анализ, при който нетният ефект на всеки фактор се определя с базисната стойност на другия фактор: $\Delta P_0 = P_1 - P_0 = \Delta p q_0 + \Delta q p_0 + \Delta p \Delta q = (p_1 - p_0)q_0 + (q_1 - q_0)p_0 + (p_1 - p_0)(q_1 - q_0)$. С числата от примера се получава следната сума на ефектите: (50-60)50+(30-50)60+(50-60)(30-50) = -500+(-1200)+200 = -1700+200 = -1500 хил. лева. Действително сумата на ефектите е точно равна на разликата $\Delta P_0 = -1500$ хил. лв., но отделните ефекти са **неверни**. Всеки от двата нетни ефекта съдържа съвместния ефект $-\Delta p \Delta q = -200$ хил. лв. и по този начин вместо един съвместен ефект има два такива ефекта (фиг. 2). Или сумата на ефектите е математически вярна, но отделните ефекти са неверни. Именно в това се състои подвеждането с въпросната схема за адитивния анализ, когато случаят с едновременните намаления на двата фактора се решава както случая с едновременните увеличения.

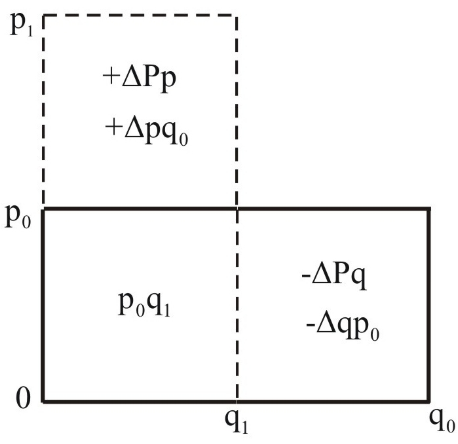
На следващия етап адитивният анализ преминава от абсолютна в относителна форма. С числата от примера $\frac{br\Delta P_p}{P_0} = \frac{-346{,}2}{3000} = -0{,}1154$ и $\frac{br\Delta P_q}{P_0} = \frac{-1153{,}8}{3000} = -0{,}3846$. Сумата на двата брутни относителни ефекта е -0,1154+(-0,3846)= -0,5000, или е точно равна на относителното намаление на продукцията $\Delta I_0 = I_0 - 1 = \frac{P_1}{P_0} - 1 = \frac{1500}{3000} - 1 = -0{,}5000$. Интерпретацията с процентите е, че продукцията е намаляла с 11,54% от намалението на цената и едновременно с 38,46% от намалението на нейното натурално количество.

2.3. Адитивен факторен анализ на обема на продукцията на една стока от увеличението на нейната цена и намалението на натуралното количество

Следващите два случая (В) и (Г) за анализ на промените на стойностните маси (обемите на продукцията) на стоките В и Г в табл. 1 се характеризират с **разнопосочни** промени на техните цени и натурални количества. Адитивният факторен анализ за тях показва отсъствие на съвместни ефекти и по тази причина той е по-лесен в сравнение с анализа при еднопосочните факторни промени. За сметка на адитивния анализ обаче следващият индексен факторен анализ на случаите с разнопосочните факторни промени е по-труден. Както ще видим по-нататък, причината за тази трудност е, че най-напред в единия от аналитичните индекси трябва да се включи положителен фиктивен съвместен ефект, за да се изпълни индексното равенство $I_0 = I_p \times I_q$. След това той се анулира с математическия сигнум h = 0, за да се получи точното еднозначно решение само с реално съществуващите два нетни ефекта. За двата случая с разнопосочните факторни промени, както за еднопосочните, няма никакво значение редът на тяхното представяне и решение.

Първият случай с разнопосочните факторни промени е за изменението на обема на продукцията на стоката В в табл. 1 от увеличението на цената $\Delta p > 0$ и намалението на натуралното количество $\Delta q < 0$. Той е един от най-разпространените в икономиката, както и първият случай с еднопосочните факторни увеличения $\Delta p > 0$ и $\Delta q > 0$. По-конкретно, изменението на продукцията на стоката В възлиза на $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0 = 90 \times 30 - 50 \times 50 = 2700 - 2500 = 200$ хил. лв. увеличение. Адитивният анализ с математическия сигнум h = 0 на посоченото увеличение е представен на фиг. 3.

Фиг. 3. Ефекти от увеличението на цената и намалението на натуралното количество на стоката



На фиг. 3 се вижда ясно, че няма никакъв съвместен ефект, защото мястото за него е **празно**. Противоположните факторни промени са увеличение на цената с $\Delta p = p_1 - p_0 = 90 - 50 = 40$ хил. лв. и намаление на натуралното количество с $\Delta q = q_1 - q_0 = 30 - 50 = -20$ натурални единици на стоката. Адитивният факторен анализ с математическия сигнум h е $\Delta P = \Delta P_p + \Delta P_q + h\Delta P_{pq} = \Delta p q_{\min} + \Delta q p_{\min} + h\Delta p \Delta q$, където $q_{\min} = q_1$, $p_{\min} = p_0$ и h = 0, защото при $\Delta p > 0$ и $\Delta q < 0$ няма съвместен ефект. Или $\Delta P = \Delta P_p + \Delta P_q + h\Delta P_{pq} = \Delta p q_1 - \Delta q p_0 + 0\Delta p \Delta q = \Delta p q_1 - \Delta q p_0$. С числата от примера

$\Delta P_p = \Delta pq_1 = (90-50)30 = 40\times 30 = 1200$ хил. лв. и $\Delta P_q = -\Delta qp_0 = (30-50)50 = -20\times 50 = -1000$ хил. лева. Първият нетен ефект $\Delta P_p = 1200$ хил. лв. е увеличение на продукцията само от факторното увеличение на цената, докато вторият нетен ефект $\Delta P_q = -1000$ хил. лв. е намаление на продукцията само от противоположното факторно намаление на натуралното количество на стоката. Алгебричната сума на двата нетни ефекта $\Delta P_p + \Delta P_q = 1200 + (-1000) = 200$ хил. лв. е точно равна на увеличението на продукцията с $\Delta P = 200$ хил. лева. При разнопосочните промени крайният резултат от анализа взема алгебричния знак на по-големия ефект по абсолютна стойност. Във връзка с посоченото решение всяко друго е **погрешно.** Например ако се допусне, че ефектът ΔP_p е равен на Δpq_0, трябва и ефектът ΔP_q да бъде равен на Δqp_1, за да бъде изпълнено равенството $\Delta P_p + \Delta P_q = \Delta P$. При тези условия с числата от примера

$$\Delta P_p + \Delta P_q = \Delta pq_0 - \Delta qp_1 = (90-50)50 + (30-50)90 = 40\times 50 + (-20)90 =$$
$$= 2000 + (-1800) = 200$$

хил. лева. Или получава се същият краен резултат за общото увеличение на продукцията с 200 хил. лв., но двата ефекта са погрешни, защото всеки от тях съдържа несъществуващ съвместен ефект с различен знак. Например ефектът $\Delta P_p = \Delta pq_0$ включва несъществуващ положителен ефект $\Delta p\Delta q$, за който $\Delta p = (p_1 - p_0) = 90-50 = 40 > 0$ и $\Delta q = (q_0 - q_1) = 50-30 = 20 > 0$. Положителният съвместен ефект $\Delta p\Delta q$ обаче е равен на 40 х 20 = 800 хил. лв. и е недопустим, защото се получава с обратната разлика $\Delta q = (q_0 - q_1) > 0$, а не с действителната $\Delta q = (q_1 - q_0) = 30-50 = -20 < 0$ (фиг. 3). Другият ефект $\Delta P_q = -\Delta qp_1$ включва също несъществуващия съвместен ефект, но като отрицателна величина $\Delta p\Delta q < 0$. Действително с нея

$$\Delta P_q = (q_1 - q_0)p_1 = (q_1 - q_0)p_0 + (q_1 - q_0)(p_1 - p_0) = (30-50)50 + (30-50)(90-50) =$$
$$= -20\times 50 + (-20)40 = -1000 + (-800) = -1800$$

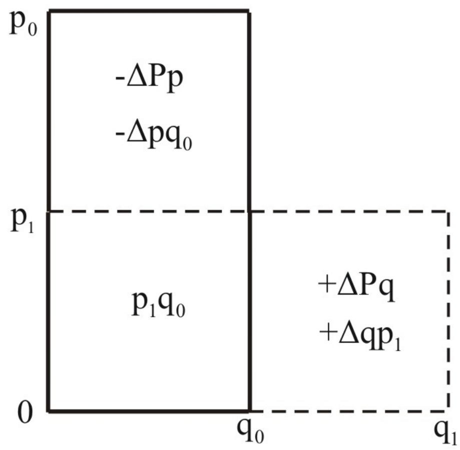
хил. лв.,

където $\Delta p\Delta q =$ -800 хил. лева. При сумиране на ефектите двата противоположни съвместни ефекта се унищожават взаимно и се стига до същото общо увеличение на продукцията с 200 хил. лева. С числата от примера $\Delta P_p = \Delta pq_0 = 40\times 50 = 2000$ хил. лв. и $\Delta P_q = -\Delta qp_1 = (-20)90 = -1800$ хил. лв., откъдето $\Delta P_p + \Delta P_q = 2000 + (-1800) = 200$ хил. лева. Двата ефекта Δpq_0 и ($-\Delta qp_1$) в тази сума, които съдържат двата несъществуващи ефекта с различни знаци, са **неверни.** Следователно с математическия сигнум $h = 0$ се получават единствените верни и точни нетни ефекти $\Delta P_p = \Delta p q_1 = 1200$ хил. лв. и $\Delta P_q = -\Delta q p_0 = -1000$ хил. лева. По-нататък елементарният иконометричен модел с тези ефекти е $\frac{\Delta P_p}{\Delta p} = \frac{1200}{40} = 30$ хил. лв. и $\frac{\Delta P_q}{\Delta q} = \frac{-1000}{-20} = 50$ хил. лева. Интерпретацията на получените резултати е, че при увеличение на цената с 1000 лв. продукцията се увеличава с 30 хил. лв. и при едновременно намаление на количеството на стоката с една натурална единица продукцията намалява с 50 хил. лева. Другата необходима относителна форма на адитивния факторен анализ за случая (В) е $\frac{\Delta P_p}{P_0} = \frac{1200}{2500} = 0,48$ и $\frac{\Delta P_q}{P_0} = \frac{-1000}{2500} = -0,40$. Нейната интерпретация в проценти е, че увеличението на цената е влияело за увеличение на продукцията с 48%, докато намалението на натуралното количество на стоката е влияело за нейното намаление с 40%.

2.4. Адитивен факторен анализ на обема на продукцията на една стока от намалението на нейната цена и увеличението на натуралното количество

Адитивният факторен анализ на този случай с разнопосочните факторни промени $\Delta p < 0$ и $\Delta q > 0$ се характеризира също с **отсъствие** на съвместен ефект. Както за предходния случай (В) с разнопосочните промени $\Delta p > 0$ и $\Delta q < 0$, така и в настоящия случай адитивният факторен анализ е по-лесен от индексния анализ. Данните за него са за изменението на продукцията (стойностната маса) на стоката Г в табл. 1 и са представени графично на фиг. 4.

Фиг. 4. Ефекти от намалението на цената и увеличението на натуралното количество на стоката



Фиг. 4

Числата за стоката Г не са същите както за предходния случай (В) с разменени места за базисната и отчетната година, защото при обобщаване (сумиране) на данните за всички стоки те могат взаимно да се неутрализират. В случая (Г) изменението на продукцията възлиза на $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0 = 50 \times 70 - 60 \times 60 = 3500 - 3600 = -100$ хил. лв. намаление. Адитивният факторен анализ с математическия сигнум за това намаление е представен на фиг. 4. На нея ясно се виждат ефектите от противоположните факторни промени с $\Delta p = p_1 - p_0 = 50 - 60 = -10$ хил. лв. намаление на цената и с $\Delta q = q_1 - q_0 = 70 - 60 = 10$ броя увеличение на натуралното количество на стоката. При тези разнопосочни промени дискретните факторни променливи p и q, както и математическият сигнум h, имат следните стойности: $q_{\min} = q_{0,} p_{\min} = p_1$ и h = 0, защото при $\Delta p < 0$ и $\Delta q > 0$ няма съвместен ефект. Или $\Delta P = \Delta P_p + \Delta P_q - h\Delta P_{pq} = -\Delta p q_0 + \Delta q p_1 + 0\Delta p \Delta q = -\Delta p q_0 + \Delta q p_1$ (фиг. 4). С числата от примера $\Delta P_p = -\Delta p q_0 = (50 - 60)60 = -10 \times 60 = -600$ хил. лв. е намаление, а $\Delta P_q = -\Delta q p_1 = (70 - 60)50 = 10 \times 50 = 500$ хил. лв. е увеличение на продукцията. Първият нетен ефект $\Delta P_p = -600$ хил. лв. е намаление на продукцията само от факторното намаление на цената, докато вторият нетен ефект $\Delta P_q = 500$ хил. лв. е увеличение на продукцията само от противоположното факторно увеличение на натуралното количество на стоката. Алгебричната сума на двата нетни ефекта $\Delta P_p + \Delta P_q$ е точно равна на общото намаление на продукцията с $\Delta P = -100$ хил. лв., защото

$\Delta P_p + \Delta P_q = -600 + 500 = -100$ хил. лева. Както в предходния случай (В) с разнопосочните факторни промени общото изменение на продукцията взема алгебричния знак на по-големия ефект по абсолютна стойност. Получените резултати от анализа показват, че в случая (Г) няма съвместен ефект, защото математическият сигнум h е равен на нула и на фиг. 4 се вижда, че мястото за този ефект е **празно.** Анализът с всяка друга логика е **погрешен,** защото, ако се допусне например, че ефектът ΔP_p е равен на Δpq_1, трябва и ефектът ΔP_q да бъде равен на Δqp_0, за да бъде изпълнено равенството $\Delta P_p + \Delta P_q = \Delta P$. С числата от примера $\Delta P_p + \Delta P_q = -\Delta pq_1 + \Delta qp_0 = (50-60)70 + (70-60)60 = -10 \times 70 + 10 \times 60 = -700 + 600 = -100$ хил. лева. Или получава се същият краен резултат за намалението на продукцията със 100 хил. лв., но двата ефекта са **неверни,** защото всеки от тях съдържа несъществуващ съвместен ефект. Ефектът $\Delta P_p = -700$ хил. лв. включва несъществуващ отрицателен съвместен ефект $-\Delta p \Delta q = -10 \times 10 = -100$ хил. лв., докато другият ефект $\Delta P_q = 600$ хил. лв. включва същия несъществуващ съвместен ефект, но като положителна величина $+\Delta p \Delta q = (p_0 - p_1)(q_1 - q_0) = (60-50)(70-60) = 10 \times 10 = +100$ хил. лева. Както се вижда, този несъществуващ положителен съвместен ефект се получава с недопустимата за анализа обратна разлика $\Delta p = (p_0 - p_1)$. Двата противоположни съвместни ефекта се унищожават взаимно, но те са неверни. От това следва, че единствените верни и точни ефекти са нетните, получени с математическия сигнум h = 0, $\Delta P_p = -\Delta pq_0 = -600$ хил. лв. и $\Delta P_q = \Delta qp_1 = 500$ хил. лева. По-нататък с тези ефекти може да се премине също в елементарен иконометричен модел с факторните промени Δp и Δq: $\frac{\Delta P_p}{\Delta p} = \frac{-600}{-10} = 60$ хил. лв. и $\frac{\Delta P_q}{\Delta q} = \frac{500}{10} = 50$ хил. лева. Интерпретацията на тези отношения е, че на 1000 лв. намаление на цената продукцията намалява с 60 хил. лв., докато при увеличение на количеството на стоката с една натурална единица продукцията се увеличава с 50 хил. лева. От своя страна относителната форма на адитивния анализ, която е необходима за следващия индексен факторен анализ, е $\frac{\Delta P_p}{P_0} = \frac{-600}{3600} = -0,1667$ и $\frac{\Delta P_q}{P_0} = \frac{500}{3600} = 0,1389$. Тяхната сума е -0,1667+0,1389 = -0,0278, или е точно равна на относителното намаление на продукцията с $\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{-100}{3600} = -0,0278$. Интерпретацията на относителните нетни ефекти в проценти е, че намалението на цената е влияело за намалението на продукцията с 16,67%, докато увеличението на натуралното количество на стоката е влияело за нейното увеличение с 13,89%.

Обобщено, верните и точни (еднозначни) решения на адитивния факторен анализ с помощта на теоретичния критерий h за дискретната нечетна функция на математическия сигнум са следните:

- при Δp>0 и Δq>0; $\Delta P = \Delta P_p + \Delta P_q + \Delta P_{pq}$
- при Δp<0 и Δq<0; $\Delta P = -\Delta P_p - \Delta P_q - \Delta P_{pq}$
- при Δp>0 и Δq<0; $\Delta P = \Delta P_p - \Delta P_q$
- при Δp<0 и Δq>0; $\Delta P = -\Delta P_p + \Delta P_q$.

При еднопосочните факторни промени с Δp>0 и Δq>0 или Δp<0 и Δq<0 крайните решения са с брутните ефекти, образувани от нетните ефекти и пропорционално разпределените съвместни ефекти между тях: $\Delta P = br\Delta P_p + br\Delta P_q$ и $\Delta P = -br\Delta P_p - br\Delta P_q$.

Всички ефекти образуват абсолютната форма на адитивния факторен анализ. От нея се преминава в относителната форма с отношенията на ефектите спрямо базисната стойност на зависимата променлива P_0. С отношенията на всички ефекти спрямо съответните факторни промени Δp и Δq се съставят елементарни иконометрични модели с двата фактора p и q.

3. Индексен факторен анализ на обема на продукцията на една стока от промените на нейната цена и натурално количество

Следващата, втора форма на елементарния функционален анализ е индексната. Тя произлиза от предходната относителна форма на адитивния факторен анализ, но може и самостоятелно да бъде изведена и обоснована без адитивния анализ. В този ред е направено следващото изложение на индексния анализ. Индексният факторен анализ започва с традиционното индексно равенство $I_0 = I_p \times I_q$, където I_0 е известният **резултативен** индекс или отношение на зависимата дискретна променлива $\frac{P_1}{P_0}$. Според разглеждания пример в табл. 1 това отношение е между обема на продукцията P_1 в хил. лв. на всяка отделна стока през отчетната или текущата година спрямо продукцията P_0 на същата стока през базисната година. От този индекс произлиза величината на точното относително изменение на зависимата променлива P_0, или $\Delta I_0 = I_0 - 1 = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{\Delta P}{P_0}$. Другите два индекса или отношения са **факторни** за цената $I_p = \frac{p_1}{p_0}$ и за натуралното количество на стоката $I_q = \frac{q_1}{q_0}$. Като относителни и ненаименовани величини те показват различната интензивност или величината на относителната промяна на всеки фактор: $\Delta I_p = I_p - 1 = \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0}$ на цената p и $\Delta I_q = I_q - 1 = \frac{q_1 - q_0}{q_0} = \frac{\Delta q}{q_0}$ на натуралното количество q. Оттук произлизат целта и задачата на всеки индексен факторен анализ - да се измери влиянието на всяка относителна факторна промяна върху относителното изменение на зависимата променлива $\Delta I_0 = \frac{\Delta P}{P_0}$. За тази цел трябва да се съставят два нови индекса - $I_{\Delta p}$ и $I_{\Delta q}$, всеки от които да показва **каква част** от относителното изменение на зависимата променлива се дължи само на влиянието на всяка относителна факторна промяна. Тъй като относителното изменение на зависимата променлива е спрямо нейната базисна стойност P_0, е необходимо и новите индекси да бъдат построени спрямо P_0, а не да бъдат като изходните факторни индекси I_p и I_q спрямо базисните стойности p_0 и q_0 на двата фактора. Следователно на първия етап на индексния факторен анализ двата факторни индекса I_p и I_q трябва да бъдат **заменени** с двата нови индекса $I_{\Delta p}$ и $I_{\Delta q}$, които, за да се различават от предходните факторни, са известни като **аналитични** индекси. С тях се измерват ефектите от влиянията на относителните промени ΔI_p и ΔI_q на двата фактора p и q, като сумата на ефектите трябва да бъде равна на относителното изменение на зависимата променлива $\Delta I_0 = \frac{\Delta P}{P_0}$. За да бъде изпълнено това условие, е необходимо двата аналитични индекса $I_{\Delta p}$ и $I_{\Delta q}$ да бъдат построени по такъв начин, че да се изпълнява индексното равенство $I_0 = I_{\Delta p} \times I_{\Delta q}$. Оттук произлиза следващото строго условие за аналитичните индекси, според което всеки от тях трябва да бъде равен на съответния факторен индекс, или $I_{\Delta p} = I_p$ и $I_{\Delta q} = I_q$. По-нататък от определението на аналитичните индекси е вече ясно, че ефектите, които те могат да съдържат, са относителните от адитивния факторен анализ, защото всички са измерени спрямо P_0. Следователно всеки аналитичен индекс се образува или само с нетен относителен ефект, или с нетен и евентуален съвместен ефект. Тук от условието за равенство на аналитичните с факторните индекси обаче възниква един проблем, който засяга аналитичните индекси само в случаите с разнопосочните факторни промени. Според него единият от аналитичните индекси, който съдържа положителния нетен ефект, трябва да включва и положителен фиктивен съвместен ефект. Той възниква от посоченото условие за равенство между всеки аналитичен и факторен индекс. Именно само с този фиктивен съвместен ефект може да се изпълни индексното равенство $I_0 = I_{\Delta p} \times I_{\Delta q}$. По мое мнение посоченият проблем е същинският на индексния факторен анализ, който вече повече от един век не може да се преодолее с традиционните подходи и методи. Искам обаче да отбележа предварително, че той се анулира с развитието на произведението $I_{\Delta p}$ и $I_{\Delta q}$ с относителните ефекти и потвърждава математическия критерий $h = 0$ при разнопосочните факторни промени. Неговото приложение за индексния факторен анализ ще бъде показано с примерите в табл. 1 за отделните случаи с различните факторни промени. Преди това предлагам две необходими и много полезни определения на аналитичните индекси. Ако даден аналитичен индекс съдържа само нетен относителен ефект със своя алгебричен знак, индексът се определя като нетен аналитичен, или за по-кратко само като **нетен.** Ако аналитичният индекс включва освен нетния ефект още и съвместен ефект, независимо дали той е реален, или фиктивен, индексът е **брутен**. Това означава, че двата аналитични индекса в произведението $I_{\Delta p} \times I_{\Delta q}$ могат да бъдат два нетни или брутни индекса или единият от тях да бъде нетен, а другият - брутен. Единствените задължителни или строги условия, на които трябва да отговаря всеки аналитичен индекс, са двете известни - той да е измерен спрямо базисната стойност на зависимата променлива P_0, както и да бъде равен на съответния факторен индекс. При тези условия аналитичният индекс има две интерпретации. Първата произлиза от условието за неговото равенство с факторния индекс. Според нея той измерва величината на същата относителна факторна промяна както факторния индекс. Втората интерпретация е, че всеки аналитичен индекс изразява влиянието на даден фактор чрез относителните ефекти от адитивния факторен анализ. Най-напред всеки аналитичен индекс се построява с нетния относителен ефект. Той се сравнява със съответния факторен индекс при еднопосочните или разнопосочните факторни промени. Ако нетният аналитичен индекс е равен на факторния, той се включва в индексното равенство $I_0 = I_{\Delta p} \times I_{\Delta q}$. Ако обаче не е равен на факторния индекс, той се допълва със съответния реален или фиктивен съвместен ефект със своя знак и след това се включва в индексното равенство като брутен индекс.

Следващият етап на индексния факторен анализ е **същинският** за неговото еднозначно решение от развитието на произведението на двата аналитични индекса. На този етап се **анулират** фиктивните съвместни ефекти и се получават **същите реални ефекти** от адитивния факторен анализ спрямо базисната стойност на зависимата променлива P_0. Еднозначните решения при еднопосочните промени (увеличения или намаления) на двата фактора включват двата нетни относителни ефекта и реалния относителен съвместен ефект. Всички ефекти при тези промени са с еднакви положителни или отрицателни алгебрични знаци. При другите разнопосочни факторни промени еднозначните решения на индексния анализ включват само двата нетни относителни ефекта с различните алгебрични знаци. Оттук общото еднозначно решение на индексния факторен анализ с математическия сигнум може да се изрази аналитично чрез отделното представяне на всяка от двете страни на индексното равенство $I_0 = I_{\Delta p} \times I_{\Delta q}$ със своите компоненти. Лявата страна е за индекса $I_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{P_0 + \Delta P}{P_0} = 1 + \frac{\Delta P}{P_0}$, докато дясната страна е за произведението $I_{\Delta p} \times I_{\Delta q} = \frac{P_0 + \Delta P_p + \Delta P_q + h\Delta P_{pq}}{P_0} = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} + h\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$. Математическият сигнум взема известните стойности h = +1 или 0, или -1. Окончателното индексно равенство с аналитичните индекси е $1 + \frac{\Delta P}{P_0} = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} + h\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$, където всички компоненти освен единиците участват със своите алгебрични знаци. Единицата в двете страни на равенството е за представянето на всеки индекс I_0, $I_{\Delta p}$ и $I_{\Delta q}$ като число над 1 или под 1 в границите от 0 до 1. Тя представя P_0 също като индекс $\frac{P_1}{P_0} = 1$ при $P_1 = P_0$ за случаите, когато няма факторни промени или те взаимно се неутрализират. Дясната страна на индексното равенство с относителните ефекти спрямо P_0 без единицата е алгебричната сума на тези ефекти от адитивния факторен анализ, или $\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{h\Delta P_{pq}}{P_0}$. Ако от двете страни на равенството отпадне и базисната стойност P_0, се получава аналитичният израз за абсолютната форма на адитивния факторен анализ $\Delta P = \Delta P_p + \Delta P_q + h\Delta P_{pq}$. Това са точните аналитични връзки между двете форми - адитивната и индексната на елементарния функционален анализ с дискретните данни. Оттук се извеждат следните видове факторни промени само с индексите I_p и I_q за индексния факторен анализ. Те са I_p>1 и I_q>1, ако Δp>0 и Δq>0, I_p<1 и I_q>1, ако Δp<0 и Δq<0, I_p>1 и I_q<1, ако Δp>0 и Δq<0, и I_p<1 и I_q>1, ако Δp<0 или Δq>0. С посочените едновременни индексни факторни промени чрез I_p и I_q се съставят двата точни аналитични индекса $I_{\Delta p}$ и $I_{\Delta q}$, като всеки от тях може да е нетен или брутен.

Последният етап на индексния факторен анализ се отнася само за случаите със съвместните ефекти от еднопосочните индексни факторни промени. Тези случаи включват два брутни относителни ефекта $\frac{br\Delta P_p}{P_0}$ и $\frac{br\Delta P_q}{P_0}$ от двата нетни и пропорционално разпределения между тях съвместен ефект както при адитивния факторен анализ. Или същите брутни ефекти могат да се вземат направо от относителната форма на адитивния факторен анализ. С тях последните решения на индексния факторен анализ са алгебрични суми на единицата и двата брутни относителни ефекта с еднаквите положителни или отрицателни алгебрични знаци $I_0 = 1 + \frac{br\Delta P_p}{P_0} + \frac{br\Delta P_q}{P_0}$ и $I_0 = 1 - \frac{br\Delta P_p}{P_0} - \frac{br\Delta P_q}{P_0}$. Методиката за индексния факторен анализ с четирите вида факторни промени се извежда успоредно с нейните приложения за съответните примери в табл. 1.

Индексен факторен анализ може да се извършва и направо без предходен адитивен факторен анализ. В този случай анализът използва най-старите аналитични индекси за цените $I_{p(q_0)}$ и $I_{q(p_0)}$ с постоянен състав на двамата немски индексолози Ласпейрес и Пааше от втората половина на 19-и век (Laspeyres, 1864, 1871; Pahsche, 1874). Основната разлика между тези индекси е, че индексът на Ласпейрес $I_{p(q_0)} = \frac{p_1 q_0}{p_0 q_0}$ измерва влиянието на увеличението или намаленито на цената през отчетната година за натуралното количество на стоката q_0 от базисната година, докато индексът на Пааше $I_{p(q_1)} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_1}$ измерва влиянието на същите промени на цената за натуралното количество q_1 от отчетната година. Освен тези индекси за цените в анализа участват и индексите за физическия обем на продукцията също с постоянен състав $I_{q(p_0)} = \frac{q_1 p_0}{q_0 p_0}$ и $I_{q(p_1)} = \frac{q_1 p_1}{q_0 p_1}$, където p_0 и p_1 са съизмерители на натуралното количество на стоката. Анализът започва от изходното индексно равенство $I_0 = I_p \times I_q$. За всяка задача на индексния факторен анализ се определя най-напред видът на индексните факторни промени с I_p и I_q. На съответния вид факторни промени отговаря определена двойка аналитични индекси с относителните ефекти спрямо базисната продукция P_0. След това според същия вид на индексните факторни промени се установява коя комбинация на индексите с постоянен състав може да се превърне в определената двойка аналитични индекси. По мое мнение това е **строгото условие или критерий** за верен индексен анализ. Другите условия са за равенство на индекса за цените на Ласпейрес или на Пааше с факторния индекс I_p и с аналитичния за цените, както и за равенство на съответния индекс за физическия обем на продукцията при постоянен състав с факторния I_q и с аналитичния индекс за същия физически обем. Необходимо е изрично да се подчертае, че установяването на вярната комбинация на двата индекса с постоянен състав трябва да се извършва винаги и независимо от всякакви изложени, предложени или публикувани индекси с постоянен състав. Причината е, че още няма точни аналитични критерии за избора на индекса за цените на Ласпейрес или Пааше и оттам на верен индекс за физическия обем на продукцията. Само икономическият интерес за този избор не е достатъчен и както ще се види от следващото изложение на индексния анализ на отделните примери, този интерес може да бъде и заблуждаващ.

След установяването на вярната комбинация на индексите с постоянен състав тя се преобразува във вярната двойка аналитични индекси. За тях обаче са необходими нетни и съвместни относителни ефекти спрямо базисната продукция P_0. Те трябва да се определят от факторните индекси и индексите с постоянен състав, защото няма предходен адитивен факторен анализ, откъдето да могат да се вземат. За разглеждания индексен анализ всеки нетен относителен ефект $\frac{\Delta P_p}{P_0}$ или $\frac{\Delta P_q}{P_0}$ може да се намери най-лесно с разликата между факторния индекс (равен на съответния нетен аналитичен индекс) и единицата на индекса. Съвместният ефект се определя по-трудно, защото преди него трябва да се намери нетният относителен ефект в брутния аналитичен индекс. За целта се използва едно важно свойство на индексите с постоянен състав.

Според него разликата между числителя и знаменателя на всеки индекс е равен на нетния абсолютен ефект ΔP_p или ΔP_q. С тях и известната величина P_0 се съставят нетните относителни ефекти $\frac{\Delta P_p}{P_0}$ или $\frac{\Delta P_q}{P_0}$. След това се образуват нетните аналитични индекси. Съвместният ефект се определя като разлика между съответния факторен индекс (равен на брутния аналитичен индекс) и нетния аналитичен индекс. Ако съвместният ефект в брутния аналитичен индекс е фиктивен, той се анулира в решението на индексния анализ. Всички еднозначни решения на този анализ се състоят от същите **реални** нетни и съвместни ефекти от относителната форма на адитивния факторен анализ както в предходния индексен анализ.

След така изложената методика читателят може с основание да запита защо трябва да се използват индексите с постоянен състав, след като те се превръщат в аналитичните индекси с относителните ефекти от адитивния факторен анализ. Отговорът е, защото целият свят работи с индексите при постоянен състав, без те да са съобразени с еднозначните решения от адитивния факторен анализ.

3.1. Индексен факторен анализ на случая с увеличения на цената и натуралното количество на стоката

Този случай е за стоката А в табл. 1 с едновременните факторни увеличения на цената с Δp>0 и на натуралното количество Δq>0 (фиг. 1). Резултативният индекс за продукцията на тази стока е $I_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} = \frac{4000}{1600} = 2{,}50$, или обемът на нейната продукция се е увеличил два пъти и половина през отчетната спрямо базисната година. В проценти същото увеличение е с $\Delta I_0 = (I_0 - 1)100 = (2{,}50 - 1)100 = 150\%$. Факторният индекс за цената е $I_p = \frac{p_1}{p_0} = \frac{80}{40} = 2{,}00$, или показва, че увеличението на цената е два пъти, или е с $\Delta I_p = (I_p - 1)100 = (2-1)100 = 100\%$. Другият факторен индекс за натуралното количество на стоката е $I_q = \frac{q_1}{q_0} = \frac{50}{40} = 1{,}25$ и означава, че това количество се е увеличило 1,25 пъти. В проценти същото увеличение е само с $\Delta I_q = (I_q - 1)100 = (1{,}25 - 1)100 = 25\%$. Индексното равенство с факторните индекси е $I_0 = I_p \times I_q = 2{,}00 \times 1{,}25 = 2{,}50$. Според изложената методика за индексния факторен анализ факторните индекси са I_p>1 и I_q>1, откъдето индексните факторни промени са

$\Delta I_p = (I_p - 1) > 0$ или $\Delta I_q = (I_q - 1) > 0$. Задачата на индесния факторен анализ е да се заменят факторните индекси I_p и I_q с аналитичните $I_{\Delta p}$ и $I_{\Delta q}$, които съдържат съответните относителни ефекти от адитивния анализ. На фиг. 1 за разглеждания случай с I_p>1 и I_q>1 се вижда, че нетният ефект само от прираста на цената Δp>0 е ΔP_p, откъдето относителният размер на този ефект спрямо P_0 е $\frac{\Delta P_p}{P_0}$. От своя страна: $\Delta I_p = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta p q_0}{p_0 q_0} = \frac{\Delta P_p}{P_0}$. По аналогичен начин нетният ефект на фиг. 1 само от прираста на натуралното количество на стоката Δq>0 е ΔP_q, откъдето нетният относителен ефект спрямо P_0 е $\frac{\Delta P_q}{P_0}$. Той също е равен на ΔI_q, защото $\Delta I_q = \frac{\Delta q}{q_0} = \frac{\Delta q p_0}{p_0 q_0} = \frac{\Delta P_q}{P_0}$. От посочените равенства $\Delta I_p = \frac{\Delta P_p}{P_0}$ и $\Delta I_q = \frac{\Delta P_q}{P_0}$ индексните факторни промени ΔI_p и ΔI_q се заменят с нетните относителни ефекти $\frac{\Delta P_p}{P_0}$ и $\frac{\Delta P_q}{P_0}$, откъдето факторните индекси $I_p = 1 + \Delta I_p$ и $I_q = 1 + \Delta I_q$ съвпадат с аналитичните нетни индекси $I_{\Delta p} = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0}$ и $I_{\Delta q} = 1 + \frac{\Delta P_q}{P_0}$. С тези аналитични индекси точното решение на индексния факторен анализ е:

$$I_0 = I_{\Delta p} \times I_{\Delta q} = \left(1 + \frac{\Delta P_p}{P_0}\right)\left(1 + \frac{\Delta P_q}{P_0}\right) = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{\Delta P_p}{P_0} \times \frac{\Delta P_q}{P_0} = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}.$$

При I_p>1 и I_q>1 това решение съвпада с традиционното $I_0 = \left(1 + \Delta I_p\right)\left(1 + \Delta I_q\right) = 1 + \Delta I_p + \Delta I_q + \Delta I_p \Delta I_q$. Съвместният ефект в него е произведението $\Delta I_p \Delta I_q$ на двата положителни нетни относителни ефекта.

Крайните резултати от анализа са брутните ефекти $\frac{br\Delta P_p}{P_0}$ и $\frac{br\Delta P_q}{P_0}$, с които $I_0 = 1 + \frac{br\Delta P_p}{P_0} + \frac{br\Delta P_q}{P_0}$. С резултатите от адитивния факторен анализ на продукцията на стоката А в точка 2.1 се получава следното решение на индексния факторен анализ на същата продукция: I_0=(1+1,00)(1+0,25)=1+1,00+0,25 +1x0,25=1+1,00+0,25+0,25=2,50.

Брутните относителни ефекти са $\frac{br\Delta P_p}{P_0} = \frac{\Delta P_p + \Delta P_{pqp}}{P_0} = 1,20$ и $\frac{br\Delta P_q}{P_0} = \frac{\Delta P_q + \Delta P_{pqq}}{P_0} = 0,30$, откъдето I_0=1+1,20+0,30=2,50. На практика се предпочита тяхната ясна и важна интерпретация според относителната форма на адитивния факторен анализ. Причината е, че всички ефекти са в мерни единици на зависимата променлива, в случая - на продукцията в паричен израз.

Самостоятелният индексен факторен анализ с индексите при постоянен състав за стоката А се извършва с индексните факторни увеличения I_p = 2,00>1 и I_q = 1,25>1. На тях отговарят двата нетни аналитични индекса $I_{\Delta p} = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0}$=2,00>1 и $I_{\Delta q} = 1 + \frac{\Delta P_q}{P_0}$=1,25>1. Вярната комбинация на индексите с постоянен състав е с индекса на Ласпейрес $I_{p(q_0)}$ и индекса за физическия обем на продукцията $I_{q(p_0)}$, защото те могат да се превърнат в посочените нетни аналитични индекси с положителните нетни относителни ефекти $\frac{\Delta P}{P_0}$ и $\frac{\Delta P_q}{P_0}$. За по-голяма яснота на самостоятелния индексен анализ верните комбинации на индексите с постоянен състав са подредени като първа, втора, трета и четвърта комбинация според четирите вида на индексните факторни промени с факторните индекси I_p и I_q. След това се определят нетните абсолютни ефекти ΔP_p и ΔP_q като разлика между числителя и знаменателя на всеки индекс с постоянен състав $I_{p(q_0)}$ и $I_{q(p_0)}$. Нетният ефект ΔP_p се намира с разликата от индекса $I_{p(q_0)} = \frac{p_1 q_0}{p_0 q_0}$ или $p_1 q_0 - p_0 q_0 = 80 \times 40 - 40 \times 40 = 3200 - 1600 = 1600$ хил. лева. От индекса $I_{q(p_0)} = \frac{q_1 p_0}{q_0 p_0}$ нетният ефект $\Delta P_q = q_1 p_0 - q_0 p_0 = 50 \times 40 - 40 \times 40 = 2000 - 1600 = 400$ хил. лева. С намерените нетни ефекти ΔP_p и ΔP_q и известната базисна стойност на продукцията $P_0 = 1600$ хил. лв. се пресмятат нетните относителни ефекти $\frac{\Delta P_p}{P_0} = \frac{1600}{1600} = 1,00$ и $\frac{\Delta P_q}{P_0} = \frac{400}{1600} = 0,25$. С тях се съставят двата нетни аналитични индекса $I_{\Delta p} = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} = 1 + 1 = 2,00 > 1$ и $I_{\Delta q} = 1 + \frac{\Delta P_q}{P_0} = 1 + 0,25 = 1,25 > 1$. При наличие на нетни аналитични индекси нетните относителни ефекти $\frac{\Delta P_p}{P_0}$ и $\frac{\Delta P_q}{P_0}$ се намират още по-лесно като разлики между всеки факторен индекс I_p или I_q и единиците на индексите. С нетните относителни ефекти вярната (първа) комбинация на индексите с постоянен състав $I_{p(q_0)}$ и $I_{q(p_0)}$ се преобразува в двойката аналитични индекси $I_{\Delta p} = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0}$ и

$I_{\Delta q}=1+\frac{\Delta P_q}{P_0}$. С нея се получава известното еднозначно решение на индексния факторен анализ при условията $I_p>1$ и $I_q>1$:

$$I_0=I_{p(q_0)}\times I_{q(p_0)}=I_{\Delta p}\times I_{\Delta q}=\left(1+\frac{\Delta P_p}{P_0}\right)\left(1+\frac{\Delta P_q}{P_0}\right)=1+\frac{\Delta P_p}{P_0}+\frac{\Delta P_q}{P_0}+\frac{\Delta P_p}{P_0}\times\frac{\Delta P_q}{P_0}=1+\frac{\Delta P_p}{P_0}+\frac{\Delta P_q}{P_0}+\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$$

Всякакво друго решение с друг или с други индекси с постоянен състав е **погрешно,** въпреки че в тях индексите за цените на Ласпейрес и Пааше са равни на I_p, а двата индекса за физическия обем на продукцията са равни на I_q. Това може да се покаже с останалите три погрешни комбинации на индексите с постоянен състав за решението на анализа при условията $I_p>1$ и $I_q>1$.

С втората комбинация

$$I_0=I_{p(q_1)}\times I_{q(p_1)}=\frac{p_1q_1}{p_0q_1}\times\frac{q_1p_1}{q_0p_1}=\frac{80\times 50}{40\times 50}\times\frac{50\times 80}{40\times 80}=\frac{4000}{2000}\times\frac{4000}{3200}=2{,}00\times 1{,}25=2{,}50\,.$$

Тази комбинация е **погрешна,** защото и двата нетни ефекта са **неверни**: $\Delta P_p=$ 4000 – 2000 = 2000 хил. лв. вместо 1600 хил. лв. и $\Delta P_q=$ 4000 – 3200 = 800 хил. лв. вместо 400 хил. лева.

С третата комбинация

$$I_0=I_{p(q_1)}\times I_{q(p_0)}=\frac{p_1q_1}{p_0q_1}\times\frac{q_1p_0}{q_0p_0}=\frac{80\times 50}{40\times 50}\times\frac{50\times 40}{40\times 40}=\frac{4000}{2000}\times\frac{2000}{1600}=2{,}00\times 1{,}25=2{,}50\,.$$

Третата комбинация е **погрешна,** защото първият ефект е **неверен,** $\Delta P_p=$ 4000 – 2000 = 2000 хил. лв. вместо 1600 хил. лв., независимо че вторият ефект ΔP_q = 2000 – 1600 = 400 хил. лв. е **верен.**

С четвъртата комбинация

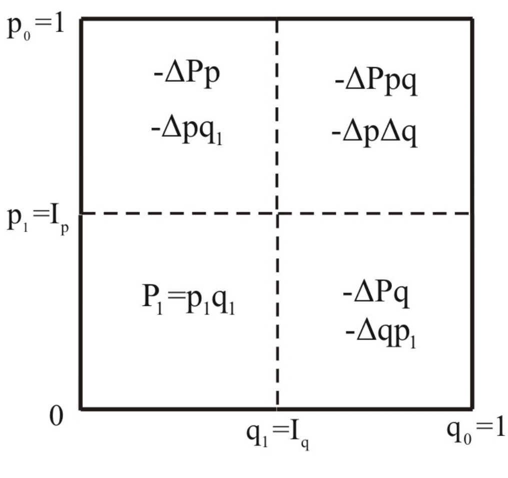
$$I_0=I_{p(q_0)}\times I_{q(p_1)}=\frac{p_1q_0}{p_0q_0}\times\frac{q_1p_1}{q_0p_1}=\frac{80\times 40}{40\times 40}\times\frac{50\times 80}{40\times 80}=\frac{3200}{1600}\times\frac{4000}{3200}=2{,}00\times 1{,}25=2{,}50\,.$$

Тази комбинация също е **погрешна,** защото първият ефект $\Delta P_p=$ 3200 – 1600 = 1600 хил. лв. е **верен,** но вторият ефект $\Delta P_q=$ 4000 – 3200 = 800 хил. лв. вместо 400 хил. лв. е **неверен.**

3.2. Индексен факторен анализ на случая с намаления на цената и натуралното количество на стоката

Това е случаят за стоката Б в табл. 1 и на фиг. 5, който е с обратни факторни промени - намаления на цената p и натуралното количество q в сравнение с предходния случай за стоката А. Както беше посочено в т. 2.2, при адитивния факторен анализ на стоката Б числата в примерите за двете стоки А и Б с еднопосочните факторни промени са различни. Индексният факторен анализ на този случай с отрицателните факторни промени $\Delta p<0$ и $\Delta q<0$ е по-труден от индексния анализ на предходния случай с положителните факторни промени. Резултативният индекс за обема на продукцията на стоката Б е $I_0=\frac{P_1}{P_0}=\frac{p_1q_1}{p_0q_0}=\frac{1500}{3000}=0,50$ и показва, че продукцията е намаляла наполовина през отчетната спрямо базисната година, или в проценти намалението е с $\Delta I_0=(I_0-1)100=(0,50-1)100=-50\%$. Факторният индекс за цената е $I_p=\frac{p_1}{p_0}=\frac{50}{60}=0,8333$ и означава, че цената е намаляла с $\Delta I_p=(I_p-1)100=(0,8333-1)100=-16,67\%$. Другият факторен индекс за натуралното количество на стоката е $I_q=\frac{q_1}{q_0}=\frac{30}{50}=0,6000$ и показва, че това количество е намаляло с $\Delta I_q=(I_q-1)100=(0,60-1)100=-40\%$. Според изложената методика при едновременните факторни намаления $\Delta p<0$ и $\Delta q<0$ факторните индекси са нормирани величини $0<I_p<1$ и $0<I_q<1$. При тези условия по-трудният случай на индексния факторен анализ за стоката Б може по-ясно да се реши геометрично с помощта на фиг. 5.

Фиг. 5. Ефекти от индексните факторни намаления на цената и натуралното количество на стоката



Тя представлява квадрат, двата катета на който са с максимална дължина p_0=1 и q_0=1. С тях площта, която представя обема на продукцията през базисната година, е $P_0 = p_0 q_0 = 1 \times 1 = 1$. При p_0=1 и q_0=1 стойностите на цената и натуралното количество на стоката през отчетната година p_1 и q_1 представляват относителните дялове на p_0=1 и q_0=1. Като относителни дялове те могат да се изразят чрез факторните индекси $I_p = \frac{p_1}{p_0}$ и $I_q = \frac{q_1}{q_0}$, откъдето $p_1 = I_p$ и $q_1 = I_q$. По този начин са означени p_1 и q_1 на фиг. 5. За връзка с фиг. 2 обаче вътре в нея са нанесени съответните ефекти от адитивния факторен анализ както във фиг. 2. Тъй като факторните индекси са нормирани величини в границите от 0 до 1, техните реципрочни стойности измерват също с индекс **по-силното** влияние на едното факторно намаление в сравнение с по-слабото влияние на другото факторно намаление. За разглеждания пример индексът за различните влияния е $I_{\frac{q}{p}} = \frac{1}{I_q} : \frac{1}{I_p}$, защото $I_q < I_p$. С числата от примера $I_{\frac{q}{p}} = \frac{1}{0,6000} : \frac{1}{0,8333} = 1,6667 : 1,2000 = 1,3889$. Този резултат показва, че непрекъснато във всеки момент на времето между базисната и отчетната година намалението на натуралното количество на стоката Δq е влияело средно 1,39 пъти **по-силно** от намалението на цената Δp върху намалението на продукцията ΔP на стоката.

С всички изложени дотук условия нетните относителни ефекти се определят с натуралното количество на стоката q_1 и нейната цена p_1 от отчетната година (фиг. 5). Ако за нетния относителен ефект от намалението на цената се използва индексното факторно намаление ΔI_p = -0,1667, то може да се представи с отношението $\frac{-\Delta P_p}{p_0 q_1} = \frac{-300}{60 \times 30} = \frac{-300}{1800} = -0,1667$ (фиг. 2). Числителят ($-\Delta P_p$= -300 хил. лв.) в това отношение е отрицателният нетен ефект от абсолютната форма на адитивния факторен анализ, а знаменателят $p_0 q_1$=1800 хил. лв. е онази част от произведената продукция през базисната година, която включва този нетен ефект (фиг. 5). С индексното намаление $\Delta I_p = \frac{-\Delta P_p}{p_0 q_1}$ факторният индекс I_p=(1 - ΔI_p) се превръща в аналитичен ΔI_p с алгебричната сума 1 - $\frac{\Delta P_p}{p_0 q_1}$=1-0,1667=0,8333. По същия начин с нетния относителен ефект $\frac{-\Delta P_q}{p_1 q_0}$ се съставя и аналитичният индекс за натуралното количество на стоката

$I_{\Delta q} = 1 - \dfrac{\Delta P_q}{p_1 q_0}$ (фиг. 5). В тази формула числителят на дробта ($-\Delta P_q$= -1000 хил. лв.) е отрицателният нетен ефект от абсолютната форма на адитивния факторен анализ, а знаменателят $p_1 q_0$ =50x50=2500 хил. лв. е онази част от произведената продукция през базисната година, която включва също нетния ефект (фиг. 5). С индексното намаление $\Delta I_q = \dfrac{-\Delta P_q}{p_1 q_0} = \dfrac{-1000}{2500} = -0,40$ факторният индекс I_q=(1-ΔI_q) се превръща в аналитичен $I_{\Delta q}$ с алгебричната сума $1 - \dfrac{\Delta P_q}{p_1 q_0}$=1-0,40 = 0,60. С произведението на двата аналитични индекса се получава:

$$I_0 = I_{\Delta p} \times I_{\Delta q} = \left(1 - \frac{\Delta P_p}{p_0 q_1}\right)\left(1 - \frac{\Delta P_q}{p_1 q_0}\right) = 1 - \frac{\Delta P_p}{p_0 q_1} - \frac{\Delta P_q}{p_1 q_0} + \left(-\frac{\Delta P_p}{p_0 q_1}\right)\left(-\frac{\Delta P_q}{p_1 q_0}\right).$$

С числата от примера за стоката Б

I_0 = 1-0,1667-0,4000+(-0,1667)(-0,4000)=1-0,1667-0,4000+0,0667. Положителният съвместен ефект 0,0667 обаче е **недопустим,** защото всички ефекти в случая с отрицателните факторни промени Δp<0 и Δq<0 са отрицателни величини. Причината за този резултат е, че двете индексни факторни намаления ΔI_p и ΔI_q са **брутни** величини, защото всяко от тях включва съответния нетен и съвместния ефект (фиг. 5). По същата причина и двата факторни индекса I_p и I_q са **брутни.** Това може да се види на фиг. 5, където с индексното намаление на цената ΔI_p= -0,1667 се определят два отрицателни ефекта спрямо P_0: точният нетен $\dfrac{-\Delta P_p}{P_0} = \dfrac{-300}{3000} = -0,1000$ и съвместният ефект $\dfrac{-\Delta P_{pq}}{P_0} = \dfrac{-200}{3000} = -0,0667$ от относителната форма на адитивния факторен анализ с математическия сигнум h = -1. С другото индексно намаление ΔI_q= -0,4000 се определят също два отрицателни ефекта спрямо P_0: точният нетен ефект $\dfrac{-\Delta P_q}{P_0} = \dfrac{-1000}{3000} = -0,3333$ и съвместният ефект $\dfrac{-\Delta P_{pq}}{P_0} = \dfrac{-200}{3000} = -0,0667$ също от относителната форма на адитивния факторен анализ с математическия сигнум h = -1. По този начин съвместният ефект $\dfrac{-\Delta P_{pq}}{P_0}$ участва в двата ефекта $\dfrac{-\Delta P_p}{p_0 q_1}$ и $\dfrac{-\Delta P_q}{p_1 q_0}$. Или $\dfrac{-\Delta P_p}{p_0 q_1} = \dfrac{-\Delta P_p}{P_0} + \dfrac{-\Delta P_{pq}}{P_0}$ и $\dfrac{-\Delta P_q}{p_1 q_0} = \dfrac{-\Delta P_q}{P_0} + \dfrac{-\Delta P_{pq}}{P_0}$. Оттук произлиза вярното решение на индексния факторен анализ в случая с индексните факторни промени I_p<1 и I_q<1. За целта двата отрицателни брутни ефекта $\frac{-\Delta P_p}{p_0 q_1}$ и $\frac{-\Delta P_q}{p_1 q_0}$ се заместват със своите суми $\left(\frac{-\Delta P_p}{P_0}+\frac{-\Delta P_{pq}}{P_0}\right)$ и $\left(\frac{-\Delta P_q}{P_0}+\frac{-\Delta P_{pq}}{P_0}\right)$ в индексното равенство $I_0 = I_{\Delta p}\times I_{\Delta q} = \left(1-\frac{\Delta P_p}{P_0}-\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\right)\left(1-\frac{\Delta P_q}{P_0}-\frac{-\Delta P_{pq}}{P_0}\right) = 1-\frac{\Delta P_p}{P_0}-\frac{\Delta P_q}{P_0}-\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$. С числата за тези ефекти I_0= (1-0,1000-0,0667)(1-0,3333-0,0667)= 1-0,1000-0,3333-0,0667=1-0,5000=0,50. Така се получава решението на индексния факторен анализ със същите два нетни ефекта и съвместния от относителната форма на адитивния факторен анализ.

Крайното решение е с пропорционално разпределените части на съвместния ефект $I_0 = 1-\frac{br\Delta P_p}{P_0}-\frac{br\Delta P_q}{P_0}$. Брутните ефекти $\frac{br\Delta P_p}{P_0} = -0{,}1154$ и $\frac{br\Delta P_q}{P_0} = -\,0{,}3846$ се вземат също от относителната форма на адитивния факторен анализ. С тях I_0=1-0,1154-0,3846=1-0,5000=0,5000. Интерпретацията на брутните ефекти е същата както в предходния пример за стоката А според относителната форма на адитивния анализ.

Самостоятелният индексен факторен анализ с индексите при постоянен състав за стоката Б се извършва с индексните факторни намаления I_p = 0,8333<1 и I_q = 0,60<1. На тях отговарят двата брутни аналитични индекса $bI_{\Delta p} = 1-\frac{\Delta P_p}{P_0}-\frac{\Delta P_{pq}}{P_0} = 0{,}8333 < 1$ и $bI_{\Delta q} = 1-\frac{\Delta P_q}{P_0}-\frac{\Delta P_{pq}}{P_0} = 0{,}60 < 1$. Вярната комбинация на индексите с постоянния състав е втората с индекса за цените на Пааше $I_{p(q_1)}$ и индекса за физическия обем на продукцията $I_{q(p_1)}$, защото те могат да се превърнат в брутните аналитични индекси. Това превръщане се извежда от равенството $I_{p(q_1)} = I_{\Delta p}$, където $\frac{p_1 q_1}{p_0 q_1} = \frac{p_0 q_1 + \Delta P_p}{p_0 q_1} = \frac{p_0 q_1 + (p_1 - p_0) q_1}{p_0 q_1} = \frac{p_0 q_1 - \Delta P_p}{p_0 q_1} = 1-\frac{\Delta P_p}{p_0 q_1}$. Отрицателният знак на нетния ефект ΔP_p произлиза от отрицателната факторна разлика $(p_1 - p_0)$<0. Полученият аналитичен индекс $I_{\Delta p}$ обаче е нетен само по форма, но всъщност той е недобре построен брутен аналитичен индекс, защото не е спрямо базисната стойност на продукцията $P_0 = p_0 q_0$. Той се превръща в брутен аналитичен индекс спрямо P_0 както в предходния индексен анализ с помощта на фиг. 5, след като отрицателният относителен ефект $-\frac{\Delta P_p}{p_0 q_1}$ се замени със сумата на отрицателния нетен и съвместен ефект спрямо

P_0. С тази сума брутният аналитичен индекс спрямо P_0 е $bI_{\Delta p} = \left(1 - \frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\right)$. По аналогичен начин се превръща и индексът за физическия обем на продукцията $I_{q(p_1)}$ в брутен аналитичен индекс. Най-напред се изпълнява равенството $I_{q(p_1)} = I_{\Delta q}$, където $\frac{q_1 p_1}{q_0 p_1} = \frac{q_0 p_1 + \Delta P_q}{q_0 p_1} = \frac{q_0 p_1 + \left(q_1 - q_0\right) p_1}{q_0 p_1} = \frac{q_0 p_1 - \Delta P_q}{q_0 p_1} = 1 - \frac{\Delta P_q}{q_0 p_1}$. Отрицателният знак на нетния ефект ΔP_q произлиза от отрицателната факторна разлика $\left(q_1 - q_0\right)$<0. Полученият аналитичен индекс I_q също е недобре построен брутен индекс, защото не е спрямо базисната стойност на продукцията $P_0 = p_0 q_0$. Той се превръща в брутен аналитичен индекс спрямо P_0 по същия начин както предходния брутен аналитичен индекс $bI_{\Delta p}$. За тази цел отрицателният относителен ефект $-\frac{\Delta P_q}{q_0 p_1}$ се замества със сумата на отрицателния нетен и съвместен ефект спрямо P_0. С посочената сума брутният аналитичен индекс е $bI_{\Delta q} = \left(1 - \frac{\Delta P_q}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\right)$.

На следващия етап се намират нетните и съвместните относителни ефекти. Нетният ΔP_p се определя от $I_{p(q_1)} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_1}$ чрез разликата $q_1 p_1 - p_0 q_1 = 50 \times 30 - 60 \times 30 = 1500 - 1800 = -300$ хил. лева. Другият нетен ефект ΔP_q се определя от $I_{q(p_1)} = \frac{q_1 p_1}{q_0 p_1}$ чрез разликата $q_1 p_1 - q_0 p_1 = 30 \times 50 - 50 \times 50 = 1500 - 2500 = -1000$ хил. лева. С базисната продукция P_0=3000 хил. лв. се получават нетните относителни ефекти $\frac{\Delta P_p}{P_0} = \frac{-300}{3000} = -0{,}1000$ и $\frac{\Delta P_q}{P_0} = \frac{-1000}{3000} = -0{,}3333$. Съвместният относителен ефект $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$, който участва и в двата брутни аналитични индекса, може да се определи по няколко начина. Единият от тях е с разликата $I_p - \left(1 - \frac{\Delta P_p}{P_0}\right) = 0{,}8333 - \left(1 - 0{,}1000\right) = -0{,}0667$. Същият резултат се получава и с другата разлика $I_p - \left(1 - \frac{\Delta P_q}{P_0}\right) = 0{,}60 - \left(1 - 0{,}3333\right) = -0{,}0667$. С намерените стойности на нетните и съвместните относителни ефекти се съставят двата брутни аналитични индекса спрямо базисната продукция P_0:

$$bI_{\Delta p} = 1 - \frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{P_0} = 1 - 0{,}1000 - 0{,}0667 = 1 - 0{,}1667 = 0{,}8333$$

и $bI_{\Delta q} = 1 - \frac{\Delta P_q}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{P_0} = 1 - 0,3333 - 0,0667 = 1 - 0,40 = 0,60$.

В заключение, с вярната втора комбинация на индексите при постоянен състав с $I_{p(q_1)}$ и $I_{q(p_1)}$ се получава еднозначното и известно решение на индексния факторен анализ при условията I_p <1 и I_q <1:

$$I_0 = I_{p(q_1)} \times I_{q(p_0)} = bI_{\Delta p} \times bI_{\Delta q} = \left(1 - \frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\right)\left(1 - \frac{\Delta P_q}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\right) =$$

$$= 1 - \frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_q}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$$

Тук също важи правилото, че всякакво друго решение с друг или други индекси с постоянен състав е **погрешно.** Това може да се провери с останалите три погрешни комбинации на индексите с постоянен състав. Първата комбинация е **погрешна,** защото и двата нетни ефекта са **неверни.**

$$I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q(p_0)} = \frac{p_1 q_0}{p_0 q_0} \times \frac{q_1 p_0}{q_0 p_0} = \frac{50 \times 50}{60 \times 50} \times \frac{30 \times 60}{50 \times 60} = \frac{2500}{3000} \times \frac{1800}{3000} = 0,8333 \times 0,60 = 0,50.$$

$\Delta P_p = 2500 - 3000 = -500$ хил. лв. вместо –300 хил. лв. и $\Delta P_q = 1800 - 3000 = -1200$ хил. лв. вместо –1000 хил. лева.

Третата комбинация на индексите с постоянен състав също е **погрешна.**

$$I_0 = I_{p(q_1)} \times I_{q(p_0)} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_1} \times \frac{q_1 p_0}{q_0 p_0} = \frac{50 \times 30}{60 \times 30} \times \frac{30 \times 60}{50 \times 60} = \frac{1500}{1800} \times \frac{1800}{3000} = 0,8333 \times 0,60 = 0,50.$$

Първият ефект $\Delta P_p = 1500 - 1800 = -300$ хил. лв. е **верен,** но вторият ΔP_q е **неверен,** защото разликата за него 1800-3000 = -1200 хил. лв. вместо -1000 хил. лева.

Последната (четвърта) комбинация също е **погрешна.**

$$I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q(p_1)} = \frac{p_1 q_0}{p_0 q_0} \times \frac{q_1 p_1}{q_0 p_1} = \frac{50 \times 50}{60 \times 50} \times \frac{30 \times 50}{50 \times 50} = \frac{2500}{3000} \times \frac{1500}{2500} = 0,8333 \times 0,60 = 0,50.$$

В тази комбинация ефектът ΔP_p е **неверен,** защото за него разликата е $2500 - 3000 = -500$ хил. лв. вместо –300 хил. лв. Другият ефект $\Delta P_q = 1500 - 2500 = -1000$ хил. лв. е **верен,** но при неверен ефект ΔP_p цялата комбинация е **невярна.**

3.3. Индексен факторен анализ на случая с увеличение на цената и намаление на натуралното количество на стоката

Следващите индексни анализи са за случаите с разнопосочните факторни промени. За разлика от техните лесни адитивни анализи с математическия сигнум индексните анализи са по-трудни. Продукцията на първия от тези случаи е за стоката В в табл. 1. Тя се характеризира с увеличение на цената Δp>0 и намаление на натуралното количество Δq<0, откъдето факторните индекси са I_p>1 и I_q<1 (фиг. 3). Индексът за обема на продукцията е $I_0 = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} = \frac{P_1}{P_0} = \frac{2700}{2500} = 1,08$, или продукцията на стоката В се е увеличила с 8% през отчетната спрямо базисната година. Факторният индекс за цената е $I_p = \frac{p_1}{p_0} = \frac{90}{50} = 1,80$ и показва, че нейното увеличение в проценти е с $\Delta I_p = \left(I_p - 1\right)100 = \left(1,80 - 1\right)100 = 80\%$. От своя страна факторният индекс за натуралното количество на стоката е $I_q = \frac{q_1}{q_0} = \frac{30}{50} = 0,60$ и означава, че намалението на натуралното количество на стоката е с $\Delta I_q = \left(I_q - 1\right)100 = \left(0,60 - 1\right)100 = -40\%$. С тези големи разнопосочни факторни промени обаче индексът на продукцията $I_0 = I_p \times I_q$=1,80 х 0,60=1,08, или възлиза само на 8% увеличение. Очевидно е, че в този пример разнопосочните факторни промени в голяма степен взаимно се компенсират. Това може точно да се измери с индекса за различната сила на влиянието на двата фактора p и q. При I_q<1 неговата реципрочна стойност е $I_{rq} = \frac{1}{I_q} = \frac{1}{0,60} = 1,6667$, откъдето $I_p > I_{rq}$, защото 1,8000>1,6667. С тези данни индексът за различната сила на двата фактора е $I_{\frac{p}{q}} = \frac{I_p}{I_{rq}} = \frac{1,8000}{1,6667} = 1,08$. Полученият резултат означава, че увеличението на цената на стоката В е влияело малко по-силно от намалението на нейното натурално количество. Сравнението на двата индекса - I_0 и реципрочния, показва, че те са равни в случаите с разнопосочните факторни промени ΔI_p>0 и ΔI_q<0. От адитивния факторен анализ на разглеждания случай с факторните промени Δp>0 и Δq<0 беше установено, че няма съвместен ефект от тяхното влияние (фиг. 3). Оттук може да се предположи, че двата факторни индекса I_p и I_q могат да се превърнат в аналитични само с двата нетни относителни ефекта - положителния $\frac{\Delta P_p}{P_0}$ и отрицателния $\frac{-\Delta P_q}{P_0}$ от адитивния факторен анализ. Или $I_{\Delta p} = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} = 1 + \frac{1200}{2500} = 1 + 0,48 = 1,48$ и $I_{\Delta q} = 1 - \frac{\Delta P_q}{P_0} = 1 - \frac{1000}{2500} = 1 - 0,40 = 0,60$. С тяхното произведение обаче се получава по-малка стойност на резултативния индекс за обема на продукцията: $I_0 = \left(1+\frac{\Delta P_p}{P_0}\right)\left(1-\frac{\Delta P_q}{P_0}\right) = 1,48 \times 0,60 = 0,8880 < 1,0800$. Причината е известният проблем на индексния факторен анализ с брутните и нетните индексни промени ΔI_p и ΔI_q. На фиг. 3 много ясно се вижда, че индексната факторна промяна на цената $\Delta I_p = \frac{p_1}{p_0} - 1 = 0,80$ е **брутна** величина, защото съдържа два ефекта. Първият точен нетен положителен ефект $\frac{\Delta P_p}{P_0} = \frac{1200}{2500} = 0,48$, а вторият е фиктивен (несъществуващ) съвместен ефект също като положителна величина $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0} > 0$. Той се определя с произведението на **вярната** положителна разлика $\Delta p = \left(p_1 - p_0\right) = \left(90-50\right) = 40$ хил. лв. увеличение на цената и обратната **невярна** разлика $\Delta q = \left(q_0 - q_1\right) = \left(50-30\right) = 20$ броя увеличение на количеството на стоката (фиг. 3). Съвместният относителен ефект $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$ с тези факторни промени Δp и Δq възлиза на $\frac{\left(p_1 - p_0\right)\left(q_0 - q_1\right)}{P_0} = \frac{\left(90-50\right)\left(50-30\right)}{2500} = \frac{40 \times 20}{2500} = \frac{800}{2500} = 0,32$. Оттук сумата на двата ефекта (нетния и съвместния), които се получават с брутната индексна промяна на цената ΔI_p, е $\frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0} = 0,48 + 0,32 = 0,80$. Другата индексна факторна промяна ΔI_q<0 е **нетна,** защото с нея се представя само реалният нетен отрицателен ефект $\frac{-\Delta P_q}{P_0} = \frac{-1000}{2500} = -0,40$ (фиг. 3). С брутния положителен ефект $\frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$ и нетния отрицателен ефект $\frac{-\Delta P_q}{P_0}$ се съставят двата аналитични индекса: $I_{\Delta p} = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0} = 1 + 0,48 + 0,32 = 1,80$ и $I_{\Delta q} = 1 - \frac{\Delta P_q}{P_0} = 1 - 0,40 = 0,60$. С тяхното произведение се получава точната стойност на резултативния индекс $I_0 = I_{\Delta p} \times I_{\Delta q} =$ = 1,80 x 0,60=1,08. Или в случая с разнопосочните факторни промени I_p>1 и I_q<1 индексното равенство с аналитичните индекси е $I_0 = I_{\Delta p} \times I_{\Delta q} = \left(1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\right)\left(1 - \frac{\Delta P_q}{P_0}\right)$. Изводът от този резултат е, че индексът I_p>1 е **брутен.**

Участието на фиктивния съвместен ефект в аналитичния индекс $I_{\Delta p} = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$ обаче произлиза от **вярното** относително увеличение на цената с

ΔI_p=80% и **погрешното** допускане, че базисното натурално количество на стоката се е запазило същото (q_0) и през отчетната година (фиг. 3). В действителност с увеличението ΔI_p е създаден **само** реалният нетен ефект $\Delta P_p = (p_1 - p_0)q_1 = (90-50)30 = 40\times 30 = 1200$ хил. лв. (фиг. 3). Той е нетен, но само спрямо онази обща част от произведената продукция през базисната и отчетната година, възлизаща на p_0q_1=50x30=1500 хил. лв., откъдето $\frac{\Delta P_p}{p_0q_1}100 = \frac{1200}{1500}100 = 80\%$ (фиг. 3). Ако същият нетен ефект ΔP_p=1200 хил. лв. се отнесе към P_0=2500 хил. лв., както изисква методиката за индексния факторен анализ, относителният реален ефект възлиза само на $\frac{\Delta P_p}{P_0}100 = \frac{1200}{2500}100 = 48\%$. Следователно всички членове в развитието на индексното равенство, които представляват фиктивният съвместен ефект или той участва в тях, трябва да се анулират с математическия сигнум h = 0:

$$I_0 = bI_{\Delta p}\times I_{\Delta q} = \left(1+\frac{\Delta P_p}{P_0}+\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\right)\left(1-\frac{\Delta P_q}{P_0}\right) = 1+\frac{\Delta P_p}{P_0}+h\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}-\frac{\Delta P_q}{P_0}-h\frac{\Delta P_p}{P_0}\times\frac{\Delta P_q}{P_0}-$$
$$-h\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\times\frac{\Delta P_q}{P_0} = 1+\frac{\Delta P_p}{P_0}+0-\frac{\Delta P_q}{P_0}-0-0 = 1+\frac{\Delta P_p}{P_0}-\frac{\Delta P_q}{P_0}.$$

Или решението с тези ефекти е I_0=1+0,48-0,40=1,08.

Алгебричната сума с двата нетни относителни ефекта от адитивния анализ е вярното и точно решение на индексния факторен анализ при разнопосочните факторни промени I_p>1 и I_q<1. Известната интерпретация на двата нетни ефекта е според относителната форма на адитивния факторен анализ. Същият резултат се получава и без използване на математическия сигнум h = 0, защото фиктивният съвместен ефект се анулира в развитието на индексното произведение $bI_{\Delta p}\times I_{\Delta q}$.

$$I_0 = bI_{\Delta p}\times I_{\Delta q} = (1+0,48+0,32)(1-0,40) = 1+0,48+0,32-0,40+0,48(-0,40)+0,32(-0,40) =$$
$$= 1+0,48+0,32-0,40-0,192-0,128 = 1+0,48-0,40+0,32-0,32 = 1+0,48-0,40 = 1,08$$

Самостоятелният индексен факторен анализ с индексите при постоянен състав за стоката В се извършва с разнопосочните индексни факторни промени I_p = 1,80>1 и I_q=0,60<1. На тях отговарят брутният аналитичен индекс $bI_{\Delta p} = 1+\frac{\Delta P_p}{P_0}+\frac{\Delta P_{pq}}{P_0} = 1,80$ и нетният аналитичен индекс $I_{\Delta q} = 1-\frac{\Delta P_q}{P_0} = 0,60$. Вярната комбинация на индексите с постоянен състав е третата с индекса за цените на Пааше $I_{p(q_1)}$ и индекса за физическия обем на продукцията $I_{q(p_0)}$, защото те могат да се превърнат в посочените аналитични индекси. Това превръщане се извежда най-напред за индекса на Пааше. От равенството $I_{p(q_1)} = I_{\Delta p}$ се поучава $\frac{p_1q_1}{p_0q_1} = \frac{p_0q_1 + \Delta P_p}{p_0q_1} = 1 + \frac{\Delta P_p}{p_0q_1}$. По форма този аналитичен индекс е нетен, но тъй като не е спрямо базисната стойност на продукцията P_0, представлява недобре построен брутен аналитичен индекс. Той се превръща в брутен аналитичен индекс спрямо P_0 с помощта на фиг. 3, след като нетният относителен ефект $\frac{\Delta P_p}{p_0q_1}$ се замени със сумата на нетния относителен ефект $\frac{\Delta P_p}{P_0}$ и фиктивния съвместен относителен ефект $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$, които са спрямо P_0. Включването на фиктивния съвместен ефект в аналитичния индекс се налага поради условието $bI_{\Delta p} = I_p$. Или брутният аналитичен индекс за цените е $bI_{\Delta p} = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$. Другият аналитичен индекс е нетният $I_{q(p_0)} = \frac{q_1p_0}{q_0p_0} = \frac{q_0p_0 - \Delta P_q}{q_0p_0} = \frac{q_0p_0 - (q_1 - q_0)p_0}{q_0p_0} = 1 - \frac{\Delta P_q}{P_0}$. Отрицателният знак на нетния относителен ефект произлиза от отрицателната факторна разлика $(q_1 - q_0)$<0.

По-нататък се определят необходимите ефекти. Най-напред за брутния аналитичен индекс $bI_{\Delta p}$ се намира нетният ефект ΔP_p от индекса на Пааше $I_{p(q_1)}$. Ефектът $\Delta P_p = p_1q_1 - p_0q_1 = 2700 - 1500 = 1200$ хил. лв., откъдето нетният относителен ефект $\frac{\Delta P_p}{P_0} = \frac{1200}{2500} = 0,48$. Фиктивният съвместен ефект $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$ се определя с разликата $I_p - \left(1 + \frac{\Delta P_p}{P_0}\right) = 1,80 - \left(1 + \frac{1200}{2500}\right) = 1,80 - 1,48 = 0,32$. С тези ефекти брутният аналитичен индекс е $bI_{\Delta p} = \left(1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\right) = (1 + 0,48 + 0,32) = 1,80$. От своя страна необходимият нетен относителен ефект $\frac{\Delta P_q}{P_0}$ за другия аналитичен индекс $I_{\Delta q}$ се намира с разликата $I_q - 1 = 0,60 - 1 = -0,40$. В заключение, с вярната (трета) комбинация на индексите с постоянен състав $I_{p(q_1)}$ и $I_{q(p_0)}$, които се превръщат в аналитичните индекси $bI_{\Delta p}$ и $I_{\Delta q}$, се получава известното еднозначно решение на индексния факторен анализ при условията I_p>1 и I_q<1:

$$I_0 = I_{p(q_1)} \times I_{q(p_0)} = bI_{\Delta p} \times I_{\Delta q} = \left(1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\right)\left(1 - \frac{\Delta P_q}{P_0}\right) = 1 + \frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}.$$

Останалите три комбинации на индексите с постоянен състав са **погрешни,** защото с тях не могат да се съставят относителните ефекти при условията I_p >1 и I_q <1. Това може да се покаже с конкретните числа за стоката В.

Решението с първата комбинация е:

$$I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q(p_0)} = \frac{p_1 q_0}{p_0 q_0} \times \frac{q_1 p_0}{q_0 p_0} = \frac{90 \times 50}{50 \times 50} \times \frac{30 \times 50}{50 \times 50} = \frac{4500}{2500} \times \frac{1500}{2500} = 1,80 \times 0,60 = 1,08 .$$

Първият ефект ΔP_p е **неверен,** защото разликата е 4500 - 2500 = 2000 хил. лв. вместо 1200 хил. лева. Вторият ефект ΔP_q=1500 - 2500= -1000 хил. лв. е **верен,** но поради първия ефект цялата първа комбинация на индексите е **погрешна.**

Втората комбинация също е **погрешна,** защото решението с нея е

$$I_0 = I_{p(q_1)} \times I_{q(p_1)} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_1} \times \frac{q_1 p_1}{q_0 p_1} = \frac{90 \times 30}{50 \times 30} \times \frac{30 \times 90}{50 \times 90} = \frac{2700}{1500} \times \frac{2700}{4500} = 1,80 \times 0,60 = 1,08 .$$

В тази комбинация ефектът ΔP_p е **верен,** защото разликата за него е 2700-1500=1200 хил. лева. Другият ефект ΔP_q обаче е **неверен,** защото се определя с разликата 2700 - 4500= -1800 хил. лв. вместо -1000 хил. лева.

Последната **погрешна** комбинация е четвъртата. С нея решението е:

$$I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q(p_1)} = \frac{p_1 q_0}{p_0 q_0} \times \frac{q_1 p_1}{q_0 p_1} = \frac{90 \times 50}{50 \times 50} \times \frac{30 \times 90}{50 \times 90} = \frac{4500}{2500} \times \frac{2700}{4500} = 1,80 \times 0,60 = 1,08 .$$

В тази комбинация и двата ефекта са **неверни.** ΔP_p=4500-2500=2000 хил. лв. вместо 1200 хил. лв., а ΔP_q= 2700 - 4500= -1800 хил. лв вместо -1000 хил. лева.

3.4. Индексен факторен анализ на случая с намаление на цената и увеличение на натуралното количество на стоката

Последният случай е с разнопосочните факторни промени Δp<0 и Δq>0, откъдето I_p>1 и I_q<1. Той се отнася за продукцията на стоката Г в табл. 1 и е представен графично на фиг. 4. Резултативният индекс за изменението на продукцията на стоката Г е $I_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} = \frac{3500}{3600} = 0,9722$. Той показва, че в сравнение с другите примери продукцията на тази стока се е променила най-слабо. Факторният индекс за цената е $I_p = \frac{p_1}{p_0} = \frac{50}{60} = 0,8333$ и означава, че тя е намаляла с $\Delta I_p = \left(I_p - 1\right)100 = \left(0,8333 - 1\right)100 = -16,67\%$. Другият факторен индекс за изменението на натуралното количество на стоката е $I_q = \frac{q_1}{q_0} = \frac{70}{60} = 1,1667$ и показва, че това количество се е увеличило с $\Delta I_q = \left(I_q - 1\right)100 = 16,67\%$. Или относителното увеличение на натуралното количество е равно по абсолютна стойност на относителното намаление на цената на стоката. Този пример е съставен с изричната цел да се покаже индексен анализ с равенство по абсолютна стойност на разнопосочните промени $\left|-\Delta I_p\right|$ и $+\Delta I_q$ на двата факторни индекса. Ако не е извършен адитивен факторен анализ, за някои анализатори нестатистици може да е необяснимо защо двете противоположни, но равни индексни промени не се компенсират взаимно и резултативният индекс за продукцията е $I_0 = 1$. Точният отговор на подобен въпрос е с известната реципрочна стойност на факторния индекс, който е под 1. В разглеждания пример това е индексът за изменението на цената $I_p = 0,8333$, откъдето неговата реципрочна стойност е $I_{rp} = \dfrac{1}{I_p} = \dfrac{1}{0,8333} = 1,2000$. С тези данни отношението или индексът за различната сила на двата фактора е $I_{\frac{p}{q}} = \dfrac{I_{rp}}{I_q} = \dfrac{1,2000}{1,1667} = 1,0286$. Той покзва, че намалението на цената е незначително по-силно - само около 1,03 пъти повече от увеличението на натуралното количество. Реципрочната стойност на посочения индекс за различната сила на влиянията на двата фактора е равна на резултативния индекс $I_0 = \dfrac{1}{I_{\frac{p}{q}}} = \dfrac{1}{1,0286} = 0,9722$. Изводът е, че единствено с индекса за различната сила на двата фактора може да се оцени тяхното различно влияние върху зависимата променлива независимо от равните противоположни индексни пормени $\left|-\Delta I_p\right| = \Delta I_q$.

На следващия етап се решава индексният факторен анализ с превърнатите индекси от факторни в аналитични. Първият аналитичен индекс за намалението на цената $I_{\Delta p}$ е **нетен,** защото може да се представи с разликата $1 - \dfrac{\Delta P_p}{P_0} = 1 - \dfrac{600}{3600} = 1 - 0,1667 = 0,8333$ (фиг. 4). Другият аналитичен индекс $I_{\Delta q}$ обаче е **брутен,** защото индексният факторен прираст е $\Delta I_q = 0,1667$ и независимо че е равен по абсолютна стойност на индексното факторно намаление $\left|-\Delta I_p\right| = \left|-0,1667\right|$, съдържа два ефекта. Първият е точният нетен положителен ефект $\dfrac{\Delta P_q}{P_0} = \dfrac{500}{3600} = 0,1389$. Вторият ефект е фиктивен (несъществуващ) съвместен ефект като положителна величина $\dfrac{\Delta P_{pq}}{P_0} > 0$ както фиктивния съвместен ефект в предходния случай с противоположните факторни промени ΔI_p>0 и ΔI_q<0. Фиктивният съвместен ефект се определя с произведението на **вярната** положителна разлика $\Delta q = \left(q_1 - q_0\right) = \left(70 - 60\right) = 10$ броя увеличение на количеството на стоката и обратната **невярна** разлика $\Delta p = \left(p_0 - p_1\right) = \left(60 - 50\right) = 10$ хил. лв. увеличение на цената (фиг. 4). С тези факторни промени недопустимият ефект възлиза на $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0} = \frac{10 \times 10}{3600} = \frac{100}{3600} = 0,0278$, откъдето брутният положителен ефект е сумата на двата ефекта $\frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0} = 0,1389 + 0,0278 = 0,1667$. Следователно този брутен ефект се определя с вярната факторна промяна ΔI_p=0,1667, но с **погрешното** допускане, че увеличението на натуралното количество на стоката се извършва при запазена базисна цена p_0 и през отчетната година (фиг. 4). В действителност с увеличението ΔI_q е създаден **само** реалният нетен ефект $\Delta I_q = \left(q_1 - q_0\right) p_1 = \left(70 - 60\right)50 = 10 \times 50 = 500$ хил. лв. (фиг. 4). Той е нетен, но само спрямо общата част от произведената продукция през базисната и отчетната година $p_1 q_0 = 50 \times 60 = 3000$ хил. лв., откъдето $\frac{\Delta P_q}{p_1 q_0}100 = \frac{500}{3000}100 = 16,67\%$ (фиг. 4). Ако същият нетен ефект се отнесе към P_0=3600 хил. лв., както е според методиката за индексния факторен анализ, относителният реален ефект възлиза само на $\frac{\Delta P_q}{P_0}100 = \frac{500}{3600} = 13,89\%$. По този начин брутният аналитичен индекс за натуралното количество на стоката е $I_{\Delta q} = 1 + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$. Във връзка с него всички членове в развитието на индексния факторен анализ, които се отнасят до фиктивния съвместен ефект, се анулират с математическия сигнум h = 0:

$$I_0 = I_{\Delta p} \times I_{\Delta q} = \left(1 - \frac{\Delta P_p}{P_0}\right)\left(1 + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}\right) = 1 - \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} - h\frac{\Delta P_p}{P_0} \times \frac{\Delta P_q}{P_0} +$$
$$+ h\frac{\Delta P_{pq}}{P_0} - h\frac{\Delta P_p}{P_0} \times \frac{\Delta P_{pq}}{P_0} = 1 - \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} - 0 + 0 - 0 = 1 - \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0}$$

Същият съвместен ефект се анулира и в развитието на индексното произведение $I_{\Delta p} \times bI_{\Delta q}$ без математическия сигнум h = 0:

$$I_0 = (1-0{,}1667)(1+0{,}1389+0{,}0278) = 1-0{,}1667+0{,}1389-0{,}1667+0{,}1389+0{,}0278-$$
$$-0{,}1667\times 0{,}0278 = 1-0{,}1667+0{,}1389-0{,}0232+0{,}0278-0{,}0046 = 1-0{,}1667+0{,}1389 =$$
$$= 1-0{,}1667+0{,}1389 = 0{,}9722$$

Последната алгебрична сума е вярното и точно решение на индексния факторен анализ при разнопосочните факторни промени I_p <1 и I_q >1. В него участват само двата нетни ефекта от относителната форма на адитивния факторен анализ. Тяхната интерпретация е същата както при адитивния анализ.

Самостоятелният индексен факторен анализ с индексите при постоянен състав за стоката Г се извършва с разнопосочните факторни промени I_p = 0,8333<1 и I_q =1,1667>1. На тях отговарят нетният аналитичен индекс $I_{\Delta p} = 1-\dfrac{\Delta P_p}{P_0} = 0{,}8333$ и брутният аналитичен индекс $I_{\Delta q} = 1+\dfrac{\Delta P_q}{P_0}+\dfrac{\Delta P_{pq}}{P_0} = 1{,}1667$. Вярната комбинация на индексите с постоянния състав е четвъртата с индекса за цените на Ласпейрес $I_{p(q_0)}$ и индекса за физическия обем на продукцията $I_{q(p_1)}$, защото те се превръщат в посочените аналитични индекси с относителните ефекти. Най-напред това превръщане се извежда за индекса на Ласпейрес. От равенството $I_{p(q_0)} = I_{\Delta p}$ се получава $\dfrac{p_1 q_0}{p_0 q_0} = \dfrac{q_0 p_0 - \Delta P_p}{p_0 q_0} = \dfrac{p_0 q_0 - (p_1 - p_0) q_0}{p_0 q_0} = 1-\dfrac{\Delta P_p}{P_0}$. Другият индекс с постоянен състав за физическия обем на продукцията е $I_{q(p_1)} = \dfrac{q_1 p_1}{q_0 p_1} = \dfrac{q_0 p_1 + \Delta P_q}{q_0 p_1} = 1+\dfrac{\Delta P_q}{q_0 p_1}$. Полученият аналитичен индекс е нетен, но всъщност е недобре построен брутен аналитичен индекс, защото не е спрямо базисната стойност на продукцията P_0. Той се превръща в брутен индекс спрямо P_0, ако относителният ефект $\dfrac{\Delta P_q}{q_0 p_1}$ се замени с помощта на фиг. 4 със сумата на нетния относителен ефект $\dfrac{\Delta P_q}{P_0}$ и фиктивния съвместен ефект $\dfrac{\Delta P_{pq}}{P_0}$, които са спрямо P_0. Или брутният аналитичен индекс за физическия обем на продукцията е $bI_{\Delta q} = 1+\dfrac{\Delta P_q}{P_0}+\dfrac{\Delta P_{pq}}{P_0}$. Следоватлно с вярната четвърта комбинация на индексите с постоянен състав, които се превръщат в съответните аналитични индекси при условията на I_p <1 и I_q >1, се получава известното еднозначно решение на индексния анализ: $I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q(p_1)} = I_{\Delta p} \times bI_{\Delta q} = \left(1-\dfrac{\Delta P_p}{P_0}\right)\left(1+\dfrac{\Delta P_q}{P_0}+\dfrac{\Delta P_{pq}}{P_0}\right) = 1-\dfrac{\Delta P_p}{P_0}+\dfrac{\Delta P_{pq}}{P_0}$.

В това решение необходимият относителен ефект $\frac{-\Delta P_p}{P_0}$ се определя с разликата I_p - 1= 0,8333 – 1 = - 0,1667. За другия нетен относителен ефект $\frac{\Delta P_q}{P_0}$ най-напред се намира нетният ефект ΔP_q с разликата между числителя и знаменателя на индекса за физическия обем на продукцията $I_{q(p_1)} = \frac{q_1 p_1}{q_0 p_1}$. Ефектът $\Delta P_q = q_1 p_1 - q_0 p_1 = 3500 - 3000 = 500$ хил. лв., откъдето нетният относителен ефект $\frac{\Delta P_q}{P_0} = \frac{500}{3600} = 0,1389$. Фиктивният съвместен ефект $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0} = I_q - \left(1 + \frac{\Delta P_q}{P_0}\right) = 1,1667 - (1 + 0,1389) = 0,0278$. С тези ефекти двата аналитични индекса са $\Delta I_p = 1 - 0,1667 = 0,8333$ и $\Delta I_q = 1 + 0,1389 + 0,0278 = 1 + 0,1667 = 1,1667$.

Останалите комбинации на индексите с постоянен състав са **погрешни** за решението на индексния анализ при условията I_p<1 или I_q>1, защото не могат да се превърнат в аналитичните индекси с необходимите относителни ефекти. Те са първата, втората и третата комбинация.

С първата комбинация решението е $I_0 = I_{p(q_0)} \times I_{q(p_0)} = \frac{p_1 q_0}{p_0 q_0} \times \frac{q_1 p_0}{q_0 p_0} = \frac{50 \times 60}{60 \times 60} \times \frac{70 \times 60}{60 \times 60} = \frac{3000}{3600} \times \frac{4200}{3600} = 0,8333 \times 1,1667 = 0,9722$.

Първият ефект ΔP_p е **верен,** защото той се определя с разликата 3000–3600= = –600 хил. лв., но вторият ефект е **неверен** с разликата 4200–3600 = 600 хил. лв. вместо верния 500 хил. лева.

С втората комбинация:

$$I_0 = I_{p(q_1)} \times I_{q(p_1)} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_1} \times \frac{q_1 p_1}{q_0 p_1} = \frac{50 \times 70}{60 \times 70} \times \frac{70 \times 50}{60 \times 50} = \frac{3500}{4200} \times \frac{3500}{3000} = 0,8333 \times 1,1667 = 0,9722.$$

Тази комбинация също е **погрешна** с неверния ефект ΔP_p=3500–4200= –700 хил. лв. вместо верния –600 хил. лв. независимо от верния ефект ΔP_q= 3500–3000=500 хил. лева.

С третата комбинация:

$$I_0 = I_{p(q_1)} \times I_{q(p_0)} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_1} \times \frac{q_1 p_0}{q_0 p_0} = \frac{50 \times 70}{60 \times 70} \times \frac{70 \times 60}{60 \times 60} = \frac{3500}{4200} \times \frac{4200}{3600} = 0,8333 \times 1,1667 = 0,9722$$

Последната комбинация също е **погрешна,** защото и двата нетни ефекта са **неверни.** Ефектът ΔP_p=3500–4200= –700 хил. лв. вместо верния –600 хил. лв., както и ефектът ΔP_q= 4200–3600= 600 хил. лв. вместо верния 500 хил. лева.

Обобщено, с индексите за цените на Ласпейрес и Пааше и съотвените аналитични индекси, в които те се превръщат, може да се извършва теоретично обоснованият и съдържателен индексен факторен анализ. Ласпейрес и Пааше са поставили началото на този анализ и по повод годишнините от техните индекси нека бъдат посочени като негови основоположници.

Във връзка с изложените комбинации на индексите с постоянен състав за решението на самостоятелния индексен анализ е необходимо да се отбележи, че четирите вида агрегат за продукцията на една стока p_0q_0, p_0q_1, p_1q_0 и p_1q_1 са публикувани у нас още през 1947 г. от покойния проф. А. Ю. Тотев. От тях могат да се образуват четирите комбинации на индексите с постоянен състав, а не само формалното и неправилно геометрично осредняване на индексите на Ласпейрес и Пааше по формулата на И. Фишер. Според мен индексният факторен анализ с индексите на Ласпейрес и Пааше е можел да тръгне в правилна посока още преди войната. На въпроса докъде е стигнало това развитие в чужбина и защо не е продължило у нас, не мога да отговоря.

В заключение, настоящата публикация е с подробно и изчерпателно изложение на условията и критериите за еднозначните решения на двете форми - адитивната и индексната, на елементарния функционален анализ с дискретните данни в статистиката. С цел да се установят най-напред само строгите условия и критерии според теоретичната математика и статистика анализите са извършени само за една стока. Всички методики могат да се прилагат във всички статистики, в които всяка дискретна зависима променлива е представена с произведение на две дискретни факторни променливи. В следваща статия ще бъдат обобщени двете форми (адитивната и индексната) на елементарния функционален анализ на еднородна съвкупност (крайно множество) на една и съща стока и на разнородна съвкупност (крайно множество) на различни стоки.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА:

Александровский, А. (1938). Анализ работы промышленного предприятия, Госпланиздат, М.

Гатев, К. (1966). Обща теория на статистиката. Варна: Г. Бакалов.

Гатев, К. (1995). Въведение в статистиката, Лиа, С.

Ежков, А. (1940). Курс статистики, Госпланиздат, М.

Козлов, Т. и др. (1956). Курс общей теории статистики, Госпланиздат, М.

Кънaлиев, Т. (1977). За последователен съвкупностен подход при дефиниране на съдържанието на понятието „индекс” в индексната теория, Статистика, кн. 2, С.

Кънaлиев, Т. (1978). Относно построяването на индексни формули чрез последователно съблюдаване на съвкупностния подход, Статистика, кн. 1, С.

Кънaлиев, Т. (2005). Съвкупностният (статистически) подход за изследване на някои дискусионни въпроси на индексната теория, Статистика, 2005, кн. 1, С.

Кънaлиев, Т. (2006). Относно възможностите на т.нар. „елементарен” статистически анализ. Доклад в сб. „Статистика на предизвикателствата на информационното общество през XXI век, Наука и икономика, ИУ - Варна.

Милкоева, Б. (1998). Математически справочник, МОН, С.

Миллс, Д. (1958). Статистические методы, Госпланиздат, М.

Наумов, Н. (1959). Селскостопанска статистика, Наука и изкуство, С.

Перегудов, В. (1959). Разложение абсолютных приростов по факторам, Ученые записки по статистике, АН СССР, том V, М.

Ротштейн, А. (1947). Проблемы промышленной статистики СССР, т. III, Госпланиздат, М.

Ряузов, Н., Н. Тительбаум (1951). Статистика советской торговли, Госторгиздат, М.

Савинский, Д. (1949). Курс промышленной статистики, Госпланиздат, М.

Сатуновский, Л. (1955). Вопросы индексного метода анализа экономических явлений. Ученые записки по статистике, АН СССР, том I, М.

Станев, Л. (1956). Теория на статистиката, част II, Наука и изкуство, С.

Станев, С. (1956). Селскостопанска статистика, Наука и изкуство, С.

Станев, С., Ал. Аврамов (1983). Промишлена статистика с основи на обща теория, Наука и изкуство, С.

Стефанов, Ив., А. Ю. Тотев (1960). Теория на статистиката, Наука и изкуство, С.

Стойкова-Къналиева, А. (2006). Някои аспекти на сравнителния анализ на икономическата част от страните в Югоизточна Европа. Доклад в сб. „Статистика на предизикателствата на информационното общество през XXI век, Наука и икономика, ИУ - Варна.

Тотев, А. Ю. (1947). Построение на индексните числа и приложението им в статистиката на цените, Годишник на Софийския университет, т. XLII, С.

Тотев, А. Ю. (1948). Стопанска статистика, дял II, Анализ на статистическите редове, С.

Тотев, А. Ю. (1955). Обща теория на статистиката, Наука и изкуство, С.

Турецкий, Ш. (1941). Планирование себестоимости, Госпланиздат, М.

Христов, Е. (1978). Прирастът на продукцията според промените във вложеното количество труд и производителността на труда, Статистика, кн. 5, С.

Христов, Е. (1981). Анализ на прираста на общата продукция чрез баланса на междуотрасловите връзки, Икономическа мисъл, кн. 8, С.

Христов, Е. (2004а). Факторен анализ на прираста на абсолютни резултативни величини с реални нетни и брутни ефекти, Икономическа мисъл, кн. 3, С.

Христов, Е. (2004б). Факторен анализ на прираста на средни равнища с реални нетни и брутни ефекти, Икономическа мисъл, кн. 6, С.

Христов, Е. (2010а). Еднозначни решения от адитивен факторен анализ с дискретни данни за еднородна и разнородна продукция, Статистика, кн. 1 - 2, С.

Христов, Е. (2010б). Еднозначни решения от индексен факторен анализ с дискретни данни за еднородна и разнородна продукция, Статистика, кн. 3 - 4, С.

Христов, Е. (2013). Факторни модели за общото, прякото и косвеното влияние на повъзрастовата смъртност върху изменението на средната продължителност на живота, Статистика, кн. 3 - 4, С.

Цонев, В. (1968). Конкретен или абстрактен подход при статистическия анализ на прираста на обема на продукцията, Трудове на ВИИ „Карл Маркс”, том I, С.

Цонев, В. (1970). За по-конкретно дефиниране на факторите при анализ на прираст на обеми, Статистика, кн. 4, С.

Цонев, В. (1978). Мултипликативно или адитивно свързване на индексите при анализа на прирасти на съвкупности, Статистика, кн. 3, С.

Цонев, В. (1984). Традиционный и новый алгоритм построения индексных формул, Научни трудове на Висшия икономически институт „Карл Маркс", факултет „Икономическа информация", том I, С.

Цонев, В. (1998). Теорията на индексите и нейната статистическа алтернатива, Статистика, кн. 1, С.

Шапкарев, П., П. Хавезов, С. Божинов (1950). Ръководство по статистика, Наука и изкуство, С.

Шапкарев, П. (1951). Планиране и анализ на себестойността в промишленото предприятие, Наука и изкуство, С.

Югенбург, С. (1955). О разложении абсолютных прирастом по факторам, Ученые записки по статистике, АН СССР, том I, М.

Янакиев, Р. (1952). Промишлена статистика, Наука и изкуство, С.

Янакиев, Р. (1954). Учебник по промишлена статистика, ВИИ „Карл Маркс", С.

Bachman, G., L. Narici (1966). Functional analyses. Academic Pres, N.Y.

Fisher, I. (1922). The Making of Index Numbers. Boston: Houghton Mifflin.

Kreyszig, E. (1993). Advenced Engineering Mathematics. John Willey, N.Y.

Laspeyres, E. (1864). Hamburger Wahrenprice 1850 - 1863. Jahrbücher für National Ökonomie und Statistik, 3.

Laspeyres, E. (1871). Die Berechnung einemittleren Wahrenpreissteigerung. Jahrbücher für National Ökonomie und Statistik, 10.

Pahsche, H. (1874). Über die Preisentwicklung der letzten Jahre nach den Hamburger Borsennotirungen. Jahrbücher für National Ökonomie und Statistik, 12.